

УДК 519.71; 510.22;629.78; 681.5; 004.274; 681.3.001

УКПП

Номер держреєстрації 0118U003987

Інв № \_\_\_\_\_

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ  
ДЕРЖАВНЕ КОСМІЧНЕ АГЕНТСТВО УКРАЇНИ  
Інститут космічних досліджень  
(ІКД)

03187, м. Київ-187, просп. Академіка Глушкова, 40, к. 4/1  
телефакс 526 41 24, телефон 526 41 24, e-mail: [ikd@ikd.kiev.ua](mailto:ikd@ikd.kiev.ua)

ЗАТВЕРДЖУЮ

директор Інституту космічних  
досліджень НАН України та ДКА  
України  
чл.-кор. НАН України

\_\_\_\_\_ О.П. Федоров  
\_\_\_\_\_ 2018 р.

ЗВІТ

ПРО НАУКОВО-ДОСЛІДНУ РОБОТУ  
за договором від 08 лютого 2018 р. № 3-02/18

**Розробка та дослідження методів управління динамічними системами з обмеженими параметричними і структурними збуреннями, включаючи системи орієнтації космічних апаратів**

**Етап № 1 «РОЗРОБКА МЕТОДІВ СИНТЕЗУ УПРАВЛІННЯ, ЩО СТАБІЛІЗУЄ ПАРАМЕТРИЧНЕ СІМЕЙСТВО ЛІНІЙНИХ І НЕЛІНІЙНИХ ДИСКРЕТНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ З ОБМЕЖЕНИМИ ЗБУРЕННЯМИ»  
(проміжний)**

Науковий керівник  
академік НАН України

В.М. Кунцевич

2018

Результати роботи розглянуто Вченою радою ІКД НАН України та ДКА України, Протокол від 13.12.2018 № 7

**СПИСОК ВИКОНАВЦІВ**

Науковий керівник НДР  
головний науковий  
співробітник,  
академік НАН України

Кунцевич В.М.  
(вступ; розділи 1, 2; висновки)

Завідувач відділу  
чл.-кор. НАН України

Губарев В.Ф.  
(вступ; розділ 2; висновки)

Провідний науковий  
співробітник, д.т.н.

Волосов В.В.  
(вступ; розділи 3, 4, висновки)

Старший науковий  
співробітник, к.т.н.

Сальніков М.М.  
(розділ 1)

Старший науковий  
співробітник, к.ф.-м.н.

Шевченко В.М.  
(розділи 3, 4)

Науковий співробітник,  
к.т.н.

Мельничук С.В.  
(розділ 2, 3)

Головний математик

Царук Н.П.  
(розділи 1–4; технічне редагування)

## РЕФЕРАТ

Звіт про НДР: 50 с., 10 рис., 49 посилань.

СІМЕЙСТВО ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ, ОБМЕЖЕНІ ПАРАМЕТРИЧНІ І СТРУКТУРНІ ЗБУРЕННЯ, МЕТОДИ СТАБІЛІЗАЦІЇ СІМЕЙСТВА, ГЕОСТАЦІОНАРНИЙ СУПУТНИК, ТОЧКА СТОЯННЯ, СТАБІЛІЗАЦІЯ ДОВГОТИ ТОЧКИ СТОЯННЯ

Об'єкт дослідження – методи стабілізації сімейств динамічних систем (ДС), включаючи системи космічного призначення та, зокрема, системи стабілізації точки стояння геостаціонарного супутника.

Мета дослідження – мета проекту полягає в подальшому розвитку загальної теорії управління ДС на основі гарантованого підходу до інтерпретації обмежених параметричних та структурних збурень в математичних моделях ДС та дослідження ефективності застосування отриманих результатів в управлінні космічними апаратами на приладі стабілізації довготи точки стояння геостаціонарного супутника. На відміну від широко відомого калманівського підходу при гарантованому підході не потрібна апріорна інформація про імовірнісні властивості збурень або невизначеності, яка в багатьох випадках буває відома розробникам систем управління недостатньо повно. Апріорно припускається відомою тільки інформація про обмеженість згаданих збурень за тією чи іншою нормою.

Методи дослідження – методи теоретичної механіки, лінійної алгебри та оптимізації, стійкості руху.

Отримані результати: методи синтезу управління, що стабілізує сімейство лінійних і нелінійних ДС з обмеженими параметричними та структурними збуреннями.

Область застосування – підприємства космічної галузі України, науково-дослідні та навчальні установи НАН і МОН України.

**ПЕРЕЛІК СКОРОЧЕНЬ, УМОВНИХ ПОЗНАК,  
ОДИНИЦЬ І ТЕРМІНІВ**

ДС	динамічна система
СК	система координат
ІСК	інерціальна система координат
ОСК	орбітальна система координат
ЗСК	зв'язана система координат
ГСК	грінвічська система координат
ГСО	геостаціонарна орбіта
ГСС	геостаціонарний супутник
ГПЗ	гравітаційне поле Землі
ТС	точка стояння
МТ	матеріальна точка
МД	множина досяжності

## ЗМІСТ

<b>ВСТУП .....</b>	<b>6</b>
<b>1 СТАБІЛІЗАЦІЯ СІМЕЙСТВ ЛІНІЙНИХ ДИСКРЕТНИХ СИСТЕМ.....</b>	<b>8</b>
1.1 Синтез стабілізаційного управління.....	8
1.2 Робастна стійкість сімейства лінійних систем .....	12
<b>2 ДОСТАТНІ УМОВИ СТАБІЛІЗОВНОСТІ СІМЕЙСТВ НЕЛІНІЙНИХ СИСТЕМ .....</b>	<b>16</b>
2.1 Невизначеність в математичних моделях нелінійних систем .....	16
2.2 Синтез стабілізаційного управління.....	19
2.3 Аналіз стійкості сімейства нелінійних систем .....	22
<b>3 СТАБІЛІЗАЦІЯ ДОВГОТИ ТОЧКИ СТОЯННЯ ГЕОСТАЦІОНАРНОГО СУПУТНИКА .....</b>	<b>26</b>
3.1 Рівняння керованого руху матеріальної точки в грінвічській системі координат .....	26
3.2 Синтез алгоритмів стабілізації довготи точки стояння геостаціонарного супутника. Метод декомпозиції.....	29
3.3 Результати обчислювальних експериментів.....	32
<b>4 ГАРАНТОВАНЕ ОЦІНЮВАННЯ ТОЧНОСТІ СТАБІЛІЗАЦІЇ ДОВГОТИ ТОЧКИ СТОЯННЯ ГЕОСТАЦІОНАРНОГО СУПУТНИКА .....</b>	<b>34</b>
4.1 Постановка задачі.....	34
4.2 Алгоритм еліпсоїдального оцінювання множин досяжності .....	35
4.3 Алгоритм оцінювання граничної множини прямим методом Ляпунова.....	37
4.4 Приклад оцінювання точності стабілізації .....	39
<b>ВИСНОВКИ .....</b>	<b>44</b>
<b>ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ .....</b>	<b>46</b>

## ВСТУП

Задачу стабілізації керованих сімейств лінійних і нелінійних систем вирішено, якщо визначено управління, яке при заданих оцінках параметрів систем забезпечує виконання необхідних і достатніх умов робастної стійкості для лінійних систем або тільки тих чи інших достатніх умов робастної стійкості для нелінійних. Перед конструктором системи управління сімейством динамічних систем виникає питання: чи можлива взагалі при заданих оцінках параметрів сімейства систем стабілізація цього сімейства, яка перевіряється при використанні достатніх умов робастної стійкості. У цьому звіті пропонується відповідь на поставлене запитання.

Після появи статті В.М. Харитонова [1] з аналізу стійкості сімейств лінійних неперервних систем, що викликала того часу справжній бум в літературі, присвяченій цій проблемі, і запровадила термін «робастна стійкість», було встановлено [2, 3], що дискретного аналога критерію стійкості Харитонова не існує. Більш того, навіть якщо для всіх  $N = 2^m$  вершин інтервальної оцінки коефіцієнтів характеристичного рівняння виконуються необхідні і достатні умови стійкості Шур-Кона, то з цього не випливає робастна стійкість сімейства дискретних систем. Як показано в [4], задача перевірки виконання необхідних і достатніх умов робастної стійкості лінійних дискретних систем є *NP*-складною.

Труднощі, пов'язані з перевіркою необхідних і достатніх умов робастної стійкості лінійних дискретних систем і тих чи інших тільки достатніх умов для нелінійних систем, спонукають шукати лише достатні умови робастної стійкості лінійних систем, сформульованих не в просторі коефіцієнтів характеристичного рівняння, а в просторі елементів матриці лінійної системи, і тих чи інших достатніх умов робастної стійкості для нелінійних систем.

Крім вирішення вищезазначених задач розвинуто методи вирішення задач управління ДС в умовах невизначеності, тобто неоднозначності інформації про параметри і зовнішні впливи. Методи засновані на поданні математичних моделей

ДС диференціальними або різницеvими рівняннями (включеннями) в формі Коші, праві частини яких містять відому вектор-функцію фазових координат і, взагалі кажучи, залежні від часу параметричні і структурні збурення. Ці збурення представлені відповідними багатозначними відображеннями з заданими обмеженнями на множину можливих значень. Зазначене подання математичних моделей ДС дало змогу використовувати для вирішення задач управління розвинуті методи теорії стійкості і, зокрема, стійкості при постійно діючих обмежених збуреннях, методи побудови зовнішніх оцінок множин досяжності, оцінок граничних множин, побудови трубок траєкторій, які називають також інтегральними воронками і т.д.

Використання вищеназваних методів дало можливість отримати рішення задач управління геостаціонарним супутником (ГСС). Отримано алгоритм стабілізації довготи точки стояння (ТС) ГСС, з використанням комп'ютерного моделювання проілюстровано його властивість робастності. Запропоновано оригінальний метод гарантованого оцінювання похибки довготи ТС, викликаної відмінністю гравітаційного поля Землі від моделі симетричного центрального поля.

# 1 СТАБІЛІЗАЦІЯ СІМЕЙСТВ ЛІНІЙНИХ ДИСКРЕТНИХ СИСТЕМ

## 1.1 Синтез стабілізаційного управління

Нижче під сімейством динамічних систем розуміється така їх сукупність, в якій один елемент сімейства відрізняється від іншого лише значенням параметрів, для яких задані їх апріорні гарантовані оцінки.

Розглянемо сімейство неперервних систем

$$\dot{X} = \tilde{A}X + \tilde{B}U, \quad (*)$$

де  $X \in \mathbf{R}^m$ ,  $\tilde{A}$  – матриця  $(m \times m)$ , для якої задана її оцінка  $\tilde{A} \in \tilde{\mathbf{A}}$ , де  $\tilde{\mathbf{A}}$  – випукла множина,  $\tilde{B}$  – матриця  $(m \times m)$ ,  $U \in \mathbf{R}^m$  – вектор управління.

Система (\*), зокрема, може бути лінеаризованою математичною моделлю системи управління орієнтацією космічного апарату (КА).

Так як в наш час для управління динамічними системами використовуються засоби комп'ютерної техніки, в якій вимірювання і управління здійснюються в дискретні моменти часу  $t_n = nT$ , де  $T$  – період квантування в часі, а  $n = 0, 1, 2, \dots$ , то від неперервної системи здійснимо перехід до її дискретного аналогу

$$X_{n+1} = AX_n + BU_n + Z_n, \quad (1.1)$$

де  $X_n \in \mathbf{R}^m$ ,  $U_n \in \mathbf{R}^m$ ,  $Z_n \in \mathbf{R}^m$ , для матриці  $A$   $(m \times m)$  задана її оцінка

$$A \in \mathbf{A}, \text{ де } \mathbf{A} \text{ – обмежена опукла множина.} \quad (1.2)$$

Процедура переходу від рівняння (\*) до рівняння (1.1) детально описана у звіті ІКД за 2016р «РОЗРОБКА МЕТОДІВ АДАПТАЦІЇ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ СКЛАДНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ І МЕТОДІВ СИНТЕЗУ КЕРУВАННЯ НИМИ».

Наразі при визначенні оцінок матриці  $A$  розрахунковим шляхом, виходячи з деяких загальних міркувань, найбільш часто використовуються інтервальні оцінки

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A}'_1 \times \mathbf{A}'_2 \times \dots \times \mathbf{A}'_m,$$

де для  $A_i^T$  рядка матриці  $A$  задаються інтервальні оцінки



$$A_i^T \in \mathbf{A}_i = \{a_{ij} : \underline{a}_{ij} \leq a_{ij} \leq \bar{a}_{ij}\}, j, i = \overline{1; m},$$

де  $a_{ij}$  —  $ij$ -й елемент матриці  $A$  (див., наприклад, [5]).

При отриманні оцінок рядків  $A_i^T$  матриці в результаті виконання тієї чи іншої процедури параметричної ідентифікації перевага з ряду причин надається використанню еліпсоїдальних оцінок

$$A_i^T \in \mathbf{A}_i'' = \{A_i^T : (A_i^T - \overset{\circ}{A}_i^T) H_i (A_i^T - \overset{\circ}{A}_i^T) \leq 1\}, i = \overline{1; m},$$

де  $\overset{\circ}{A}_i^T$  — центр еліпсоїда,  $H_i^T = H_i > 0$  — матриця  $(m \times m)$  (див. роботи О.Б. Куржанського [6], R. Schweppe [7], Ф.Л. Черноуська [8]).

Зараз, окрім великої кількості журнальних статей, з'явилися і монографії, присвячені вирішенню задач стабілізації сімейств лінійних дискретних систем (див., наприклад, [9-14]) і навіть сімейств нелінійних систем [14].

Нижче розглянемо розв'язання задачі стабілізації сімейства лінійних систем як задачу оптимальної стабілізації. Прийmemo, що для некерованого сімейства систем (1.1), тобто при  $U_n \equiv 0$ , ті чи інші умови робастної стійкості не виконуються і тому стоїть задача: вибором управління  $U_n$  стабілізувати сімейство систем (1.1), (1.2), якщо це можливо при оцінці (1.2) матриці  $A$ . Задачу оптимальної стабілізації сформулюємо як узагальнений дискретний аналог задачі В.І. Зубова [15].

Введемо функцію Ляпунова

$$v_n = X_n^T X_n \quad (1.3)$$

і управління  $U_n$  будемо шукати з розв'язку задачі мінімізації її першої різниці, обчислюваної уздовж траєкторії руху системи (1.1), (1.2), тобто з розв'язку задачі

$$\min_{U_n} \{\Delta v_n = v_{n+1} - v_n = [AX_n + BU_n]^T [AX_n + BU_n] - X_n^T X_n\}.$$

Оскільки для матриці  $A$  задана лише її оцінка (1.2), то ця задача некоректна і тому для отримання гарантованого результату заміниmo її задачею

$$\min_{U_n} \max_{A \in \mathbf{A}} \{[AX_n + BU_n]^T [AX_n + BU_n] - X_n^T X_n\}, \quad (1.4)$$

точніше кажучи, еквівалентною їй задачею

$$\min_{U_n} \max_{A \in \mathbf{A}} \{[AX_n + BU_n]^T [AX_n + BU_n]\}. \quad (1.5)$$

Відомо, що мінімаксні задачі не мають аналітичного розв'язку, але задача (1.5) — щасливий виняток з цього правила. Для розв'язування задачі (1.5) інтервальні оцінки рядків  $A_i^T$  матриці  $A$  подамо в центрованій формі

$$\mathbf{A}'_i = \overset{\circ}{A}_i + \delta \mathbf{A}_i, \quad i = \overline{1; m}, \quad (1.6)$$

де

$$\overset{\circ}{A}_i = \|\overset{\circ}{a}_{ij}\|_{j=1}^m; \quad \overset{\circ}{a}_{ij} = 0,5(\overline{a}_{ij} + \underline{a}_{ij}), \quad \Delta a_{ij} = 0,5(\overline{a}_{ij} - \underline{a}_{ij}), \quad i, j = \overline{1; m}; \quad (1.7)$$

$$\delta \mathbf{A}'_i = \delta \alpha_{i1} \times \delta \alpha_{i2} \times \dots \times \delta \alpha_{im}, \quad i = \overline{1; m}; \quad \delta \alpha_{ij} = \{\Delta a_{ij} : \Delta a_{ij} \leq |\overline{a}_{ij} - \underline{a}_{ij}|\}, \quad i, j = \overline{1; m}. \quad (1.8)$$

Еліпсоїдальні оцінки (1.5) також подамо в центрованій формі

$$A_i^T = \overset{\circ}{A}_i^T + \delta \mathbf{A}''_i, \quad i = \overline{1; m}, \quad (1.9)$$

де

$$\delta \mathbf{A}''_i = \{\Delta A_i^T : \Delta A_i^T H_i^{-1} \Delta A_i \leq 1\}, \quad i = \overline{1; m}, \quad (1.10)$$

$$\delta \mathbf{A} = \delta \mathbf{A}_1 \times \delta \mathbf{A}_2 \times \dots \times \delta \mathbf{A}_m, \quad (1.11)$$

не обговорюючи без потреби, яка з двох оцінок (інтервальна чи еліпсоїдальна) мається на увазі.

З урахуванням позначень (1.6) (або (1.9)) задачу (1.5) перепишемо

$$\min_{U_n} \max_{\Delta A \in \delta \mathbf{A}} \{[(\overset{\circ}{A} + \Delta A)X_n + BU_n]^T \times [(\overset{\circ}{A} + \Delta A)X_n + BU_n]\}. \quad (1.12)$$

**Твердження 1.** Розв'язок задачі (1.12) має вигляд

$$U_n^* = -\overset{\circ}{A} X_n. \quad (1.13)$$

Як буде показано в розділі 2, справедливість твердження 1 є наслідком наведеної теореми 1. Підставивши (1.13) в (1.1), одержимо

$$X_{n+1} = \Delta A X_n, \quad (1.14)$$

де  $\Delta A \in \delta \mathbf{A}$ .

Із принципу стиснених відображень Банаха для лінійної системи (1.14) впливає достатня умова її стійкості

$$\|A\| = \max_{i=1;m} \|A_i^T\| \leq q < 1, \text{ де } \|A_i^T\| = \sum_{j=1}^m |a_{ij}|. \quad (1.15)$$

*Зауваження 1.* У роботах [8, 9, 15, 16] достатня умова стійкості (1.15) названа умовою «надстійкості».

Із (1.13), (1.14) випливає, що управління (1.13) переміщує центр множини  $\mathbf{A} = -\overset{\circ}{A} + (\overset{\circ}{A} + \delta\mathbf{A}) = \delta\mathbf{A}$  в початок координат, але не змінює радіусу  $\rho(\tilde{\mathbf{A}})$  множини  $\tilde{\mathbf{A}}$ , який дорівнює радіусу  $\rho(\delta\mathbf{A})$  множини  $\delta\mathbf{A}$ , що визначається у вигляді

$$\rho(\delta\mathbf{A}) = \max_{\Delta A \in \delta\mathbf{A}} \|\Delta A\|.$$

В  $m$ -вимірному просторі елементів  $a_{ij}$ , де  $j = \overline{1; m}$ , множина  $\tilde{\mathbf{A}}_i^*$ , що задовольняє умову (1.15), визначає «здвоєну» піраміду зі спільною  $(m-1)$ -вимірною прямокутною основою як випуклу оболонку, натягнуту на систему векторів

$$\tilde{\mathbf{A}}_i^* = \text{conv} \left\{ \underbrace{\left( \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} 1 & -1 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 1 & -1 \end{array} \right)}_{2m}, \dots \right\} m. \quad (1.16)$$

На рис. 1.1 при  $m = 3$  показано множину  $\tilde{\mathbf{A}}_i^*$ .

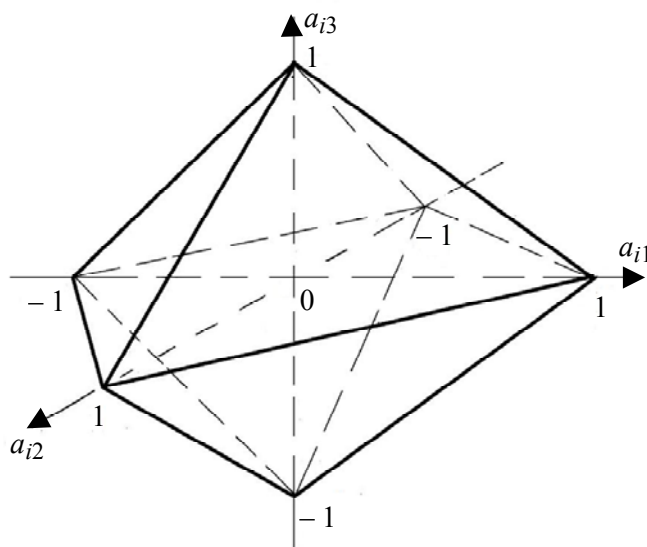


Рисунок 1.1

Незважаючи на те, що управління  $U_n$  отримано з розв'язку задачі (1.12), з цього в загальному випадку не випливає, що сімейство систем робастно стійке, оскільки оцінки (1.6) або (1.10) можуть бути такими, що клас систем (1.14) виявиться настільки широким, що не існує управління, яке стабілізує сімейство систем (1.14), стійкість якого перевіряється за достатньою умовою робастної стійкості (1.15). Тому необхідний аналіз робастної стійкості цього сімейства.

## 1.2 Робастна стійкість сімейства лінійних систем

**Твердження 2.** Сімейство систем (1.14) стійке, якщо мають місце включення

$$\delta \mathbf{A}_i \in \tilde{\mathbf{A}}_i = \{\Delta A_i^T : \|\Delta A_i^T\|_\infty = 1\}, \quad i = \overline{1; m}. \quad (1.17)$$

Для перевірки існування включень (1.17) знайдемо розв'язок задачі, яку сформулюємо спочатку на змістовному рівні: яким повинен бути радіус  $r$   $m$ -вимірної кулі

$$A_i^T A_i - r_i^2 \leq 0, \quad i = \overline{1; m}, \quad (1.18)$$

щоб площина

$$L^T A_i = r, \quad (1.19)$$

де  $L^T = (1, 1, \dots, 1)$ ,  $r = \frac{1}{\sqrt{m}}$ , була дотичною до кулі (1.18).

Зазначимо, що в додатному октанті простору  $\{A_i^T\}$  відповідна грань здвоєної піраміди  $\mathbf{A}_i^*$  належить площині (1.19).

Формально близька, але відмінна за змістом задача розв'язувалася в [16] з використанням методу невизначених множників Лагранжа. Скористаємося запропонованою там схемою і введемо функцію Лагранжа

$$\psi(A_i, \lambda) = A_i^T A_i + \lambda(L^T A_i - r),$$

де  $\lambda$  — множник Лагранжа.

Диференціюючи функцію Лагранжа і прирівнюючи похідну до нуля,

одержуємо  $\psi'(A_i, \lambda) = 2 \dot{X}^*{}^T + \lambda L^T$ . Звідси маємо  $\dot{X}^* = \frac{-\lambda}{2} L$ . Підставивши вираз для  $\dot{X}^*$  в обмеження (1.18) і виконавши деякі перетворення, одержимо

$$\dot{X}^* = r \frac{L}{L^T L}.$$

Шуканий максимум дорівнює

$$\varphi(\dot{X}^*) = \frac{r^2}{L^T L} = \frac{r^2}{m}.$$

За умовою площина (1.19) повинна бути дотичною до кулі (1.18). Тому з умови  $\varphi(\dot{X}^*) = r^2$  одержимо шукане значення радіуса сфери

$$r = \frac{1}{\sqrt{m}}. \quad (1.20)$$

Розв'язання зазначеної вище задачі дає змогу сформулювати наступне твердження.

**Твердження 3.** Якщо множини  $\delta A_i$ ,  $i = \overline{1; m}$ , —  $m$ -вимірні кулі з радіусом  $r < \frac{1}{\sqrt{m}}$ , то включення (1.17) мають місце.

Оскільки навколо  $m$ -вимірного куба зі сторонами  $\Delta a_{ij} = 0,5(\bar{a}_{ij} - \underline{a}_{ij})$ ,  $i, j = \overline{1; m}$ , можна описати сферу радіусом  $r = m^{-1}$  і якщо

$$|\Delta a_{ij}| < \frac{1}{m}; \quad j = \overline{1; m},$$

то включення (1.18) мають місце.

Визначимо тепер обмеження, що накладаються на еліпсоїдальні множини  $\delta A_i''$ ,  $i = \overline{1; m}$ , при дотриманні яких справедливі включення (1.17). Розглянемо загальний випадок, коли матриці  $H_i^{-1}$  в (1.10) загального вигляду. Знайдемо відстань  $\rho(A_i)$  від початку координат до площини, дотичної до еліпсоїда  $\delta A_i''$ , і паралельної площині  $A_i^T l = r$ , де у відповідності з (1.20)  $r = \frac{1}{\sqrt{m}}$ , а  $l$  — одиничний

вектор, що співпадає по напрямку з вектором  $L$  у співвідношенні (1.19) (рис. 1.2). В [16] така задача розв'язана і для величини  $\rho(\mathbf{A}_i)$  отримано такий вираз:

$$\rho(\mathbf{A}_i) = \sqrt{l^T H l}.$$

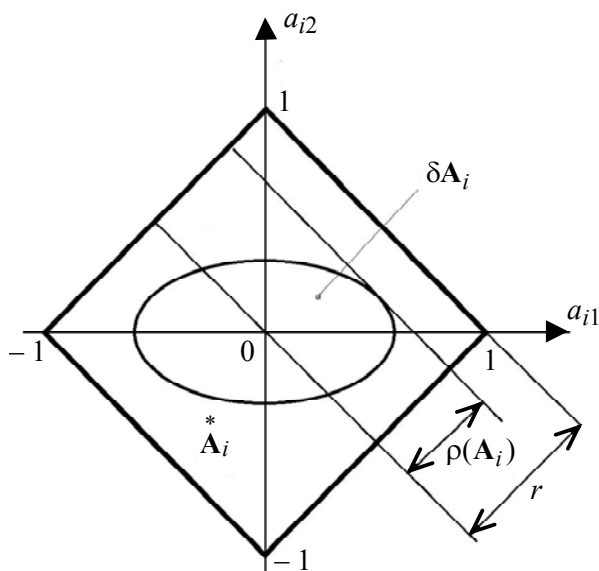


Рисунок 1.2

Якщо  $\rho(\mathbf{A}_i) < r$ ,  $i = \overline{1; m}$ , то тоді мають місце включення (1.17) (див. рис. 1.2).

Оскільки орієнтація осей еліпсоїдів  $\delta \mathbf{A}_i$ ,  $i = \overline{1; m}$ , відносно осей простору параметрів  $\{A_i^T\}$  невідома, то перевірку виконання нерівностей

$$\rho(\delta \mathbf{A}_i) < r, \quad i = \overline{1; m}, \quad (1.21)$$

тобто достатніх умов стійкості (1.18), необхідно, взагалі кажучи, проводити у всіх октантах простору  $\{A_i^T\}$ , тобто для всієї множини  $\mathbf{A}_i^*$  (здвоєної піраміди). Але множини  $\delta \mathbf{A}_i^*$  центрально-симетричні, тому справедливе наступне твердження.

**Твердження 4.** Якщо нерівності (1.21) виконуються для  $m$ -вимірної піраміди

$$\mathbf{A}_i^* = \text{conv} \left\{ \underbrace{\left( \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} 1 & -1 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)}_{2m-1}, \dots, \right\} m, \quad i = \overline{1; m},$$

з прямокутною  $(m-1)$ -вимірною основою, то включення (1.17) мають місце.

Для інтервальних оцінок  $\Delta a_{ij} \in \delta \alpha_{ij}$ ,  $i = \overline{1; m}$ , задача визначення умов, при дотриманні яких включення (1.17) мають місце, розв'язана в [17]. Включення (1.17) мають місце при виконанні умови

$$\gamma^* |\Delta a_{ij}| \leq q < 1 \quad \forall i, j = \overline{1; m},$$

де

$$\gamma^* = \min \frac{1}{\sum_{j=1}^m |\Delta a_{ij}|}.$$

Перейдемо до визначення достатніх умов стабілізованості сімейства нелінійних систем.

## 2 ДОСТАТНІ УМОВИ СТАБІЛІЗОВАНОСТІ СІМЕЙСТВ НЕЛІНІЙНИХ СИСТЕМ

### 2.1 Невизначеність в математичних моделях нелінійних систем

Першою роботою, в якій була поставлена і вирішена задача аналізу стійкості нелінійних систем з невизначеністю нестохастичної природи, була стаття А.І. Лур'є і В.Н. Постникова [18]. Вона породила новий науковий напрямок, який одержав згодом назву аналізу «абсолютної стійкості» [19]. В [18, 19] розглядалася система, що складається з лінійної і нелінійної частин. Для невідомої нелінійної функції скалярного аргументу були задані двосторонні лінійні обмеження, що породили назву «секторіальна нелінійність». Згодом результати з аналізу стійкості цього класу систем були узагальнені на клас дискретних систем аналогічної структури. У розвиток теорії абсолютної стійкості істотний внесок внесли такі великі дослідники: М.А. Айзерман, Р. Калман, В.А. Якубович, Я.З. Ципкін, Є. Джурі і багато інших.

Розглянемо спочатку клас нелінійних дискретних систем, для яких невизначеність щодо властивостей нелінійних в загальному випадку знакозмінних функцій векторного аргументу задається в параметричній формі. Так само, як і вище, прийнемо, що вектор стану  $X_n$  вимірюється повністю і без завад.

Розглянемо клас об'єктів управління, що часто зустрічається в застосуваннях, який складається з лінійної і нелінійної частин

$$X_{n+1} = AX_n + F(X_n, L) + BU_n, \quad (2.1)$$

де  $X_n \in \mathbf{R}^m$  — вектор стану,  $A$  — матриця  $(m \times m)$ , для якої задана її оцінка,  $U_n \in \mathbf{R}^m$  — вектор управління,  $B$  — матриця  $(m \times m)$ ,  $\det B \neq 0$ . В (2.1)

$$F(X_n, L) = \|l_i \tilde{f}_i(X_n)\|_{i=1}^m,$$

де  $\tilde{f}_i(\cdot)$  — задані неперервні однозначні нелінійні функції, такі що  $F(0, L) = 0$  (інші її властивості обумовлені нижче).



Для невідомих параметрів  $l_i, i = \overline{1, m}$ , вектора  $L^T = (l_1, l_2, \dots, l_m)$  задані їх оцінки

$$\mathbf{I}_i = \{l_i : l_i \leq \bar{l}_i\}, \quad i = \overline{1, m},$$

із яких випливає оцінка для вектора  $L$

$$L \in \mathbf{L} = \mathbf{I}_1 \times \mathbf{I}_2 \times \dots \times \mathbf{I}_m. \quad (2.2)$$

Прийmemo, що для некерованого об'єкта (2.13)

$$X_{n+1} = AX_n + F(X_n, L)$$

достатні умови робастної стійкості, про які мова йтиме нижче, не виконуються і тому стоїть задача: вибором управління  $U(X_n)$  стабілізувати сімейство керованих систем (2.1). Підставивши  $U(X_n)$  в (2.1), одержимо

$$X_{n+1} = F(X_n, L) + BU(X_n), \quad \text{де } L \in \mathbf{L}. \quad (2.3)$$

Вибір стабілізаційного управління для сімейства систем (2.2), (2.3) здійснимо нижче, а зараз розглянемо інший клас нелінійних систем, що містить невизначеність. Прийmemo, що для системи (2.1) нелінійні функції  $\varphi_j(\cdot), i = \overline{1, m}$ , — елементи вектор-функції  $F(\cdot)$  невідомі і для них задані лише оцінки зверху і знизу.

Прийmemo, як і в [18, 19], що функції  $\varphi_j(\cdot)$  — так звані «секторіальні» нелінійності, для яких задані обмеження у вигляді

$$\underline{g}_i \sigma_i(X) \cdot \text{sign } \sigma_i(X) \leq f_i[\sigma_i(X)] \leq \bar{g}_i \sigma_i(X) \cdot \text{sign } \sigma_i(X), \quad i = \overline{1, m}, \quad (2.4)$$

або, що еквівалентно,

$$\underline{g}_i |\sigma_i(X)| \leq f_i[\sigma_i(X)] \leq \bar{g}_i |\sigma_i(X)|, \quad i = \overline{1, m}. \quad (2.5)$$

В (2.4), (2.5)

$$\sigma_i(X) = C_i^T X; \quad i = \overline{1, m}, \quad (2.6)$$

$C_i \in \mathbf{R}^m$  — задані числові вектори.

Двосторонні обмеження (2.5) визначають багатозначне відображення (див. рис. 2.1)

$$f[\sigma(X_n)] \in \varphi(X_n) = \varphi^+(X_n) \cup \varphi^-(X_n); \quad i = \overline{1, m};$$

де

$$\varphi^+(X_n) = \{\sigma(\cdot) : \underline{k}\sigma(\cdot) \leq f(\cdot) \leq \bar{k}\sigma(\cdot)\} \text{ при } \sigma(\cdot) \geq 0;$$

$$\varphi^-(X_n) = \{\sigma(\cdot) : \bar{k}\sigma(\cdot) \geq f(\cdot) \geq \underline{k}\sigma(\cdot)\} \text{ при } \sigma(\cdot) \leq 0.$$

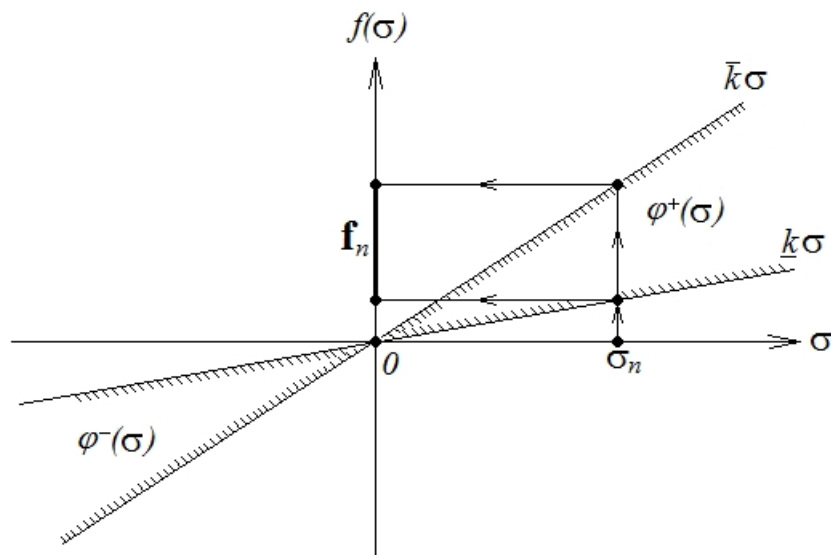


Рисунок 2.1

Багатозначне відображення  $\varphi(X)$  з лінійними межами перетворює величини  $\sigma_n$  в інтервали  $\mathbf{f}_n$  (див. рис. 2.1), розміри (радіуси) яких лінійно залежать від  $\sigma_n$ . Тому система (1.1), (1.2), (1.5) є сімейством лінійних систем

$$X_{n+1} = (A + kBC^T)X_n + U_n, \text{ де } \underline{k} \leq k \leq \bar{k}. \quad (2.7)$$

Введемо позначення

$$A' = A + P(G); \quad P(G) = GS,$$

де  $G \in \mathbf{G}$ , і перепишемо (2.7) у вигляді

$$X_{n+1} = [A + P(G)]X_n + BU_n. \quad (2.8)$$

Множини  $\mathbf{g}_i$ ,  $i = \overline{1; m}$ , представимо в центрованому вигляді

$$\mathbf{g}_i = \overset{\circ}{g}_i + \delta\mathbf{g}_i, \quad i = \overline{1; m}, \quad (2.9)$$

де

$$\overset{\circ}{g}_i = 0,5(\bar{g}_i + \underline{g}_i); \quad \delta\mathbf{g}_i = \{\Delta\mathbf{g}_i : |\Delta\mathbf{g}_i| \leq 0,5(\bar{g}_i - \underline{g}_i)\}, \quad i = \overline{1; m}. \quad (2.10)$$

Прийемо, що для матриці  $A$  задана її оцінка, представлена в центрованій формі (1.9)–(1.11). С урахуванням (2.9), (2.10) перепишемо (2.8) у вигляді

$$X_{n+1} = [\overset{\circ}{R}(\overset{\circ}{G}) + \Delta R(\Delta G)]X_n + BU_n, \quad (2.11)$$

де

$$\overset{\circ}{R}(\overset{\circ}{G}) = \overset{\circ}{A} + \overset{\circ}{G}S; \quad \Delta R(\Delta G) = \Delta A + \Delta GS; \quad \overset{\circ}{G} = \text{diag} \{g_i\}_{i=1}^m; \quad \Delta G = \text{diag} \{\Delta g_i\}_{i=1}^m; \quad (2.12)$$

$$\Delta R(\Delta G) \in \delta A + \delta G; \quad \delta G = \delta g_1 \times \delta g_2 \times \dots \times \delta g_m. \quad (2.13)$$

Зазначимо, що в (2.13) сума множин — сума за Мінковським.

Співвідношення (2.11)–(2.13) з точністю до позначень співпадають з аналогічними співвідношеннями (1.9)–(1.11).

## 2.2 Синтез стабілізаційного управління

Для визначення стабілізаційного управління  $U(X_n)$  скористаємося дискретним аналогом прямого методу Ляпунова і функцію Ляпунова прийемо у вигляді

$$v_n = X_n^T X_n. \quad (2.14)$$

В силу (2.14) обчислимо її першу різницю уздовж траєкторії руху системи (2.1)

$$\begin{aligned} \Delta v_n [X_n, L, U(X_n)] &= \\ &= [AX_n + F(X_n, L) + BU(X_n)]^T \times [AX_n + F(X_n, L) + BU(X_n)] - X_n^T X_n. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Шукану нелінійну вектор-функцію  $U(X_n)$  будемо шукати як розв'язок задачі

$$\min_{U_n} \{\Delta v [X_n, L, U(X_n)]\},$$

точніше кажучи, з розв'язання рівносильної їй задачі

$$\min_{U_n} \{[AX_n + F(X_n, L) + BU_n]^T \times [AX_n + F(X_n, L) + BU_n]\}. \quad (2.16)$$

Так як для вектора  $L$  задана тільки його оцінка (2.2), то задача (2.16) некоректна. Тому для отримання гарантованого результату замінимо її задачею

$$\min_{U_n} \max_{L \in \mathbf{L}} \{ [AX_n + F(X_n, L) + BU_n]^T \times [AX_n + F(X_n, L) + BU_n] \}. \quad (2.17)$$

Відомо, що в загальному випадку мінімаксні задачі не мають аналітичного розв'язку. Задача (2.17) — щасливий виняток з цього правила. Для підтвердження цього множини  $\mathbf{L}$  представимо в центрованій формі

$$L \in \mathbf{L} = \overset{\circ}{L} + \delta \mathbf{L}, \quad (2.18)$$

де

$$\overset{\circ}{L} = \left\| \overset{\circ}{l}_i \right\|_{i=1}^m; \quad \overset{\circ}{l}_i = 0,5(\bar{l}_i + \underline{l}_i); \quad \Delta L = \left\| \Delta l_i \right\|_{i=1}^m; \quad \Delta l_i = 0,5(\bar{l}_i - \underline{l}_i), \quad i = \overline{1; m}, \quad (2.19)$$

$$\delta \mathbf{L} = \delta \mathbf{l}_1 \times \delta \mathbf{l}_2 \times \dots \times \delta \mathbf{l}_m; \quad \delta \mathbf{l}_i = \{ \Delta l_i : |\Delta l_i| \leq 0,5(\bar{l}_i - \underline{l}_i) \}, \quad i = \overline{1; m}. \quad (2.20)$$

Зведені до центрованої форми оцінки рядків  $A_i^T$  матриці  $A$  мають вигляд (1.10), (1.11).

Введемо позначення

$$F(X_n, L) = \tilde{F}[X_n, (\overset{\circ}{L} + \Delta L)], \quad W_n = B^{-1}U_n \quad (2.21)$$

і через  $w_{i,n}$ ,  $i = \overline{1; m}$ , позначимо елементи вектора  $W_n$ .

Підставивши (2.21) в (2.17), одержимо

$$\min_{w_{i,n}} \max_{\substack{\Delta l_i \in \mathbf{l}_i \\ \Delta A_i^T \in \delta \mathbf{A}_i}} \left| [(\overset{\circ}{A}_i + \Delta A_i)^T X_n + (\overset{\circ}{l}_i + \Delta l_i) \tilde{f}_i(X_n) + w_{i,n}] \right|, \quad i = \overline{1; m}. \quad (2.22)$$

**Теорема 1** [20]. Розв'язки задач (2.22) мають вигляд

$$w_{i,n}^* = w_{i,n} = -[\Delta A_i^T X_n + \Delta l_i \tilde{f}_i(X_n)], \quad i = \overline{1; m}. \quad (2.23)$$

*Доведення.* Побудуємо доведення за схемою від протилежного, і нехай управління  $u_{in}^*$  ( $i = \overline{1; m}$ ) не є розв'язками задач (2.22). Тоді прийmemo, що  $w_{in}^{\vee} = w_{in}^* + \Delta w_{in}$ ;  $i = \overline{1; m}$ , де  $\Delta w_{in}$  — довільні функції.

Підставивши  $w_{in}^{\vee}$  в (2.22), отримаємо

$$\max_{\Delta A_i^T \in \delta \mathbf{A}_i; \Delta l_i \in \mathbf{l}_i} \left| \Delta A_i^T X_n + \Delta l_i \tilde{f}_i(X_n) + \Delta w_{in} \right|, \quad i = \overline{1; m}.$$

Серед вершин центральносиметричних інтервальних множин  $\Delta\mathbf{A}_i$ ,  $\delta\mathbf{l}_i$  існують вектори  $\Delta A_i^T \in \delta\mathbf{A}_i$  і величини  $\Delta l_i \in \delta\mathbf{l}_i$  такі, що

$$\text{sign}[\Delta A_i^T X_n + \Delta l_i \tilde{f}_i(X_n)] = \text{sign} \Delta u_{i,n}, \quad i = \overline{1; m},$$

і, отже, для всіх  $i = \overline{1; m}$  виконується

$$\max_{\Delta A_i^T \in \delta\mathbf{A}_i, \Delta l_i \in \delta\mathbf{l}_i} |\Delta A_i^T X_n + \Delta l_i \tilde{f}_i(X_n) + \Delta u_{i,n}| > \max_{\Delta A_i^T \in \delta\mathbf{A}_i, \Delta l_i \in \delta\mathbf{l}_i} |\Delta A_i^T X_n + \Delta l_i \tilde{f}_i(X_n)|,$$

що й потрібно було довести.

За знайденим вектором  $\tilde{W}^*$  з (2.23) визначаємо шукане управління

$$U_n = B^{-1} \tilde{W}_n^* = -[\Delta A X_n + \tilde{F}(X_n, \Delta L)]. \quad (2.24)$$

Підставивши (2.24) в (2.3), отримаємо рівняння, що описує динаміку керованого сімейства систем

$$X_{n+1} = \Delta A X_n + \tilde{F}(X_n, \Delta L), \quad (2.25)$$

де  $\Delta A \in \delta\mathbf{A}$ ;  $\Delta L \in \delta\mathbf{L}$ .

Незважаючи на те, що управління (2.24) отримано з рішення задач мінімізації першої різниці функції Ляпунова, з цього ще не випливає, що  $\Delta u_n < 0$  для всього сімейства систем (2.25), (2.18), оскільки цей клас систем може бути настільки широким (радіус  $\rho(\delta\mathbf{L})$  множини  $\delta\mathbf{L}$  настільки великим), що забезпечити одним загальним для всього сімейства систем (2.25), (2.18) управлінням його стабілізованість неможливо. Тому необхідна перевірка виконання достатніх умов робастної стійкості систем (2.25), (2.18), про яку мова піде нижче.

Розглянемо тепер випадок, коли в рівнянні (2.1)  $A = 0$ , тобто систему

$$X_{n+1} = F(X_n, L) + BU_n.$$

У цьому випадку задачі (2.22) набувають вигляду

$$\min_{w_{in}} \max_{\Delta l_i \in \delta\mathbf{l}_i} |\Delta l_i \tilde{f}_i(X_n) + w_{in}|, \quad i = \overline{1; m}. \quad (2.26)$$

Так як ці задачі — частковий випадок задач (2.22) ( $\delta\mathbf{A}_i = \emptyset$ ), то справедливе наступне.

Наслідок теореми 1. Розв'язки задач (2.26) мають вигляд

$$w_{in} = w_{in}^* = -\Delta l_i \tilde{f}_i(X_n), \quad i = \overline{1; m}.$$

За знайденим вектором  $W_n^*$  із (2.26) визначаємо шукане управління

$$U_n^* = -B^{-1} W_n^* = -\tilde{F}(X_n, \Delta L).$$

Підставивши управління  $U_n^*$  в (2.25) і прийнявши, що  $\Delta A = 0$ , одержимо рівняння керованого сімейства замкнутих систем з нелінійним зворотним зв'язком

$$X_{n+1} = \tilde{F}(X_n, \Delta L), \quad \text{де } \Delta L \in \delta L.$$

Оскільки це співвідношення — частковий випадок співвідношення (2.25), то питання про стійкість цього класу систем немає необхідності розглядати окремо.

### 2.3 Аналіз стійкості сімейства нелінійних систем

Відмовимося від надмірної в застосуваннях вимоги забезпечення стійкості «в цілому» синтезованих вище сімейств нелінійних систем і обмежимося вимогою їх стійкості лише в області

$$\overset{\circ}{\mathbf{X}} = \{X : \max_{X \in \overset{\circ}{\mathbf{X}}} \|X\| \leq \rho\}$$

і приймемо, що  $X_n \in \mathbf{X}_n \subset \overset{\circ}{\mathbf{X}}$ .

Почнемо з аналізу стійкості в області  $\overset{\circ}{\mathbf{X}}$  сімейства систем (2.25). Ця задача вирішується досить просто для того класу нелінійних вектор-функцій, які можуть бути подані в квазілінійній формі

$$X_{n+1} = \tilde{F}(X_n, \Delta L) = A(X_n, \Delta L) X_n, \quad (2.27)$$

де  $\Delta L \in \delta L$ .

Для сімейства систем (2.27) достатньою умовою їх стійкості в області  $\overset{\circ}{\mathbf{X}}$  є виконання нерівності (принципу стиснених відображень)

$$\max_{X_n \in \overset{\circ}{\mathbf{X}}, \Delta L \in \delta \mathbf{L}} \|A(X_n, \Delta L)\| \leq q < 1, \quad (2.28)$$

що перевіряється елементарно.

Представлення нелінійної вектор-функції  $F(\cdot)$  в квазілінійній формі (2.27) неєдине. Зауважимо, що в застосуваннях первинною формою представлення нелінійних статичних (без пам'яті) елементів є нелінійна вектор-функція  $F(X)$ , яка в багатьох випадках не допускає запису її в квазілінійній формі (2.27). Покажемо це на простому прикладі. Якщо, слідуючи Є.О. Барбашину [21], вираз (2.27) записати

$$a_i(X) = \frac{f_i(X)}{x_i}, \quad i = \overline{1; m};$$

то неважко переконатися, що клас функцій, який допускає представлення їх в квазілінійній формі, досить вузький. Дійсно, нехай  $f(x) = |x|$ . Представимо цю функцію в квазілінійній формі  $f(x) = a(x)x$ , де

$$a(x) = \frac{|x|}{x}. \quad (2.29)$$

При  $x \rightarrow 0$  маємо  $a(0) = \frac{0}{0}$ .

Оскільки функція  $\psi(x) = |x|$  недиференційована, то позбутися невизначеності величини  $a(0)$  неможливо.

Тому розглянемо достатні умови стійкості «в області» сімейств нелінійних систем, що не зводяться до представлення їх в квазілінійній формі. Для аналізу стійкості сімейства нелінійних систем (2.25) «в області» скористаємося результатами [22] і еволюцію цього сімейства систем запишемо в термінах різницевих включень

$$X_{n+1} \in \mathbf{X}_{n+1} = \Phi(\mathbf{X}_n, \delta \mathbf{A}, \delta \mathbf{L}), \quad \text{де } \Phi(\cdot) = \bigcup \tilde{F}(X_n, \Delta A, \Delta L).$$

У загальному випадку перетворення  $\Phi(\cdot)$  визначає неопуклу множину  $\mathbf{X}_{n+1}$ , точне визначення якої пов'язане з істотними труднощами обчислювального характеру. Тому, як було запропоновано в роботі [23], введемо її оцінку зверху, апроксимуючи її інтервальною множиною мінімального об'єму, і далі будемо аналізувати стійкість отриманого нелінійного різницевого включення

$$X_{n+1} \in \bar{\mathbf{X}}_{n+1} = \bar{\Phi}(\mathbf{X}_n, \delta\mathbf{A}, \delta\mathbf{L}) = \bar{\mathbf{x}}_{1,n+1} \times \bar{\mathbf{x}}_{2,n+1} \times \dots \times \bar{\mathbf{x}}_{m,n+1}, \quad (2.30)$$

де  $\bar{\mathbf{x}}_{i,n+1} = \bigcup \{(\Delta A_i)^T X_n + \Delta l_i \tilde{f}_i(X_n) : X_n \in \mathbf{X}_n, \Delta A_i^T \in \delta\mathbf{A}_i, \Delta l_i \in \delta\mathbf{l}_i\}$ ,  $i = \overline{1; m}$ .

Зауважимо, що множини  $\bar{\mathbf{x}}_{i,n+1}$ ,  $i = \overline{1; m}$ , — проєкції множини  $\mathbf{X}_{n+1}$  на відповідну координатну вісь  $Ox_i$ . Для визначення множин  $\bar{\mathbf{x}}_{i,n+1}$  ( $i = \overline{1; m}$ ) розглянемо задачу

$$\min_{X_n \in \mathbf{X}_n, \Delta A_i^T \in \delta\mathbf{A}_i, \Delta l_i \in \delta\mathbf{l}_i} [(\Delta A_i)^T X_n + \Delta l_i \tilde{f}_i(X_n)] = \underline{x}_{i,n+1}, \quad i = \overline{1; m}; \quad (2.31)$$

$$\max_{X_n \in \mathbf{X}_n, \Delta A_i^T \in \delta\mathbf{A}_i, \Delta l_i \in \delta\mathbf{l}_i} [(\Delta A_i)^T X_n + \Delta l_i \tilde{f}_i(X_n)] = \bar{x}_{i,n+1}, \quad i = \overline{1; m}. \quad (2.32)$$

Отримані значення  $\underline{x}_{i,n+1}$ ,  $\bar{x}_{i,n+1}$  ( $i = \overline{1; m}$ ) визначають інтервальні множини

$$\bar{\mathbf{x}}_{i,n+1} = \{x_i : \underline{x}_{i,n+1} \leq x_{i,n+1} \leq \bar{x}_{i,n+1}\}, \quad i = \overline{1; m},$$

підставивши які в (2.30), одержимо множину  $\bar{\mathbf{X}}_{n+1}$ .

Задачі відшукування (в загальному випадку) глобальних екстремумів функцій  $\tilde{f}_i(X_n)$  можуть виявитися занадто трудомісткими в обчислювальному відношенні. У застосуваннях часто відомі деякі важливі властивості цих функцій, які дають змогу конструктивно розв'язувати задачі відшукування екстремумів (2.31), (2.32). Так якщо обмежитися розглядом тільки опуклих (увігнутих) на множині  $\mathbf{X}_n$  функцій, то розв'язки задач (2.31), (2.32) можна ефективно відшукати за допомогою відомих програм розв'язання задач нелінійної оптимізації.

Оскільки результатом перетворення  $\Phi(\cdot)$  множини  $\mathbf{X}_n$  загального вигляду є інтервальна множина  $\bar{\mathbf{X}}_{n+1}$ , то нижче прийемо, що оцінки (1.6)–(1.8) мають вигляд

$$\mathbf{X}_n = \text{conv}_{k=1; 2^m} \{X_n^k\},$$

де  $X_n^k$  —  $k$ -а вершина  $m$ -вимірного куба  $\mathbf{X}_n$ . Введемо таку скалярну характеристику множини  $\mathbf{X}$  як її радіус:

$$\rho(\mathbf{X}) = \max_{X \in \mathbf{X}} \{\|X\|_I\}, \quad \text{де } \|X\|_I = \sqrt{\sum_{i=1}^m x_i^2}. \quad (2.33)$$



Для аналізу стійкості нелінійного різницевого включення

$$X_{n+1} \in \mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{F}(X_n) \quad (2.34)$$

скористаємося теоремою [23] і її наслідком. Оскільки функція (2.33) додатно-визначена, то вона прийнята в якості функції Ляпунова і в [23] метод аналізу асимптотичної стійкості Ляпунова чи, іншими словами, принцип стиснених відображень узагальнено на клас нелінійних різницевих включень.

**Теорема 2** [23]. Якщо перша різниця функції Ляпунова

$$\Delta v_n = v_{n+1} - v_n = \rho[\mathbf{F}(X_n)] - \rho(X_n) < 0 \quad \forall n \quad (2.35)$$

від'ємно-визначена, то тривіальний розв'язок різницевого включення (2.34) асимптотично стійкий.

*Наслідок.* Якщо початок координат — центр множини  $X_n$ , тобто центр сфери мінімального радіуса, описаної навколо  $X_n$ , є початком координат, то значення функції  $\rho(X_n)$ , обчисленої за співвідношенням (2.33) при використанні норми  $\|X\|_I$ , співпадає з радіусом описаної сфери, і з виконання нерівності (2.35) випливає, що має місце включення

$$X_{n+1} \subset X_n. \quad (2.36)$$

Неважко показати, що для інтервальних множин  $X_n$  і  $X_{n+1}$  з центрами на початку координат строге включення (2.36) має місце тоді і тільки тоді, коли, принаймні, одна з системи нестрогих нерівностей  $\underline{x}_{i,n+1} \geq \underline{x}_{i,n}$ ,  $\bar{x}_{i,n+1} \leq \bar{x}_{i,n}$ ,  $i = \overline{1; m}$ , є строгою.

Прийmemo, що властивості вектор-функції  $F(\cdot)$  і множини  $\mathbf{A}$  і  $\mathbf{L}$  такі, що для множини  $\overline{X}_{n+1}$  має місце включення

$$\overline{X}_{n+1} \subset \overline{X}_n, \quad (2.37)$$

що є достатньою умовою стійкості нелінійного різницевого включення (2.30).

Якщо умова (2.37) не виконується, то з цього випливає, що при прийнятих оцінках параметрів клас систем (2.25) настільки широкий, що не існує управління, яке стабілізує сімейство систем, робастна стійкість якого перевіряється за достатньою умовою стійкості (2.37).

### 3 СТАБІЛІЗАЦІЯ ДОВГОТИ ТОЧКИ СТОЯННЯ ГЕОСТАЦІОНАРНОГО СУПУТНИКА

#### 3.1 Рівняння керованого руху матеріальної точки в грінвічській системі координат

У задачі синтезу керування геостационарним супутником (ГСС) входять синтез алгоритмів цілеспрямованої зміни довготи точки стояння (ТС) і синтез алгоритмів стабілізації ГСС на заданій довготі в грінвічській системі координат (СК). Ці задачі найпростіше розв'язуються при використанні математичних моделей руху матеріальної точки (МТ) в різних СК. Перша з них, як і задача виведення ГСС із проміжної орбіти на геостационарну орбіту (ГСО) найбільш просто й наочно вирішується в інерціальній геоцентричній СК. У той же час в задачі стабілізації довготи точки стояння (ТС) ГСС доцільно використовувати рівняння руху МТ у грінвічській системі координат (ГСК), у якій координати супутника на геостационарній орбіті (ГСО) сталі. Для одержання зазначених рівнянь скористаємося відповідними рівняннями [1,2], доповненими прискореннями коригувального двигуна згідно з [3]. Принагідно зауважимо, грінвічська СК досить близька до геоцентричних СК WGS-84 і ПЗ-90, ПЗ-90.02, які в навігаційних задачах часто вважаються співпадаючими [4]. При цьому вищезгадані рівняння для випадку центрального гравітаційного поля Землі (ГПЗ) мають вигляд

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} - 2\varepsilon \dot{y} - \varepsilon^2 x &= -\frac{\mu}{r^3} x + u_x, \\ \ddot{y} + 2\varepsilon \dot{x} - \varepsilon^2 y &= -\frac{\mu}{r^3} y + u_y, \\ \ddot{z} &= -\frac{\mu}{r^3} z + u_z. \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

Тут  $x, y, z$  – поточні координати МТ у ГСК (нагадаємо, що під ГСК розуміється права геоцентрична СК із початком у точці  $O$ , вісь  $Oz$  збігається з віссю добового обертання Землі, вісь  $Ox$  розташована в площині грінвічського меридіана);

$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  – довжина поточного радіус-вектора МТ;  $\varepsilon$  і  $\mu$  – кутова швидкість добового обертання Землі й гравітаційна стала Землі,  $\varepsilon = 7,29 \cdot 10^{-5}$  1/с,  $\mu = 396600,4$  км<sup>3</sup>/с<sup>2</sup>;  $u_x, u_y, u_z$  – проєкції прискорення, обумовленого тягою маршових двигунів на осі ГСК. При цьому [3]  $\sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2} = m^{-1}P$ , де  $m$  – поточна маса МТ,  $P$  – тяга двигуна, загалом кажучи, дросельована й реверсована. Неважко показати, що орбітальна кутова швидкість, тобто кутова швидкість обертання ГСС навколо Землі, що дорівнює кутовій швидкості обертання Землі, визначається формулою  $\varepsilon = \sqrt{\frac{\mu}{r_S^3}}$ , де  $r_S = \sqrt{x_S^2 + y_S^2} = 42164$  км,  $x_S, y_S, z_S$  – координати ТС ГСС (координата  $z_S = 0$ ).

Одержимо рівняння еволюції відхилень координат  $x, y, z$  МТ від її відповідних координат  $x_S, y_S, z_S = 0$  на ГСО. З рівнянь (3.1) для точки стояння  $x(t) \equiv x_S, y(t) \equiv y_S, z(t) \equiv z_S = 0$  безпосередньо випливає

$$\left. \begin{aligned}
 \ddot{x}_S - 2\varepsilon \dot{y}_S - \varepsilon^2 x_S &= -\frac{\mu}{r_S^3} x_S, \\
 \ddot{y}_S + 2\varepsilon \dot{x}_S - \varepsilon^2 y_S &= -\frac{\mu}{r_S^3} y_S, \\
 \ddot{z}_S &= -\frac{\mu}{r_S^3} z_S.
 \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

Опускаючи громіздкі викладення, пов'язані з одержанням системи лінійного наближення рівнянь (3.1) в околі ТС  $x(t) \equiv x_S, y(t) \equiv y_S, z(t) \equiv z_S = 0$  і відніманням з неї системи (3.2), одержуємо систему лінійного наближення рівнянь руху МТ у відхиленнях від координат ТС, записаних у формі Коші

$$\dot{Z} = AZ + BU, \quad (3.3)$$

де  $Z^T = (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6)$ ,  $z_1 = x - x_S, z_2 = y - y_S, z_3 = z - z_S, z_4 = \dot{x} - \dot{x}_S, z_5 = \dot{y} - \dot{y}_S, z_6 = \dot{z} - \dot{z}_S$ ,

$$A = \begin{pmatrix} O_3 & I_3 \\ \tilde{A} & \underline{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O_3 & \vdots & I_3 \\ \dots & \vdots & \dots \\ \tilde{A} & \vdots & \underline{A} \end{pmatrix}, \tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{13} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{23} \\ \tilde{a}_{31} & \tilde{a}_{32} & \tilde{a}_{33} \end{pmatrix} = 3 \frac{\mu}{r_S^5} \begin{pmatrix} x_S^2 & x_S y_S & x_S z_S \\ y_S x_S & y_S^2 & y_S z_S \\ z_S x_S & z_S y_S & z_S^2 - \frac{r_S^2}{3} \end{pmatrix},$$

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} \underline{a}_{11} & \underline{a}_{12} & \underline{a}_{13} \\ \underline{a}_{21} & \underline{a}_{22} & \underline{a}_{23} \\ \underline{a}_{31} & \underline{a}_{32} & \underline{a}_{33} \end{pmatrix} = 2 \sqrt{\frac{\mu}{r_S^3}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} O_3 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}.$$

Нагадаємо, що в системі рівнянь (3.3) координата  $z_S$  ТС за визначенням ГСО дорівнює нулю.

Обчисливши визначник матриці керованості  $(AB:B)$  шляхом його розкладання по елементах першого рядка [5] знаходимо, що визначник  $\det(AB:B) = 1$ . Тому, пара  $AB$  є керованою, а система (3.3) стабілізовною.

Поклавши в рівняннях (3.1)  $\varepsilon = 0$  одержимо рівняння руху МТ в інерціальній СК

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{\mu}{r^3} x + u_x, \\ \ddot{y} &= -\frac{\mu}{r^3} y + u_y, \\ \ddot{z} &= -\frac{\mu}{r^3} z + u_z. \end{aligned} \right\}, \quad (3.4)$$

де під  $x, y, z$  розуміють проекції поточного радіуса-вектора МТ на координатні осі геоцентричної правої інерціальної системи координат (ІСК) і під  $u_x, u_y, u_z$  – проекції вектора керуючого прискорення на осі ІСК. Під ІСК розуміється друга екваторіальна СК, осі  $Oz$  і  $Ox$  якої спрямовані по осі обертання Землі й у точку весняного рівнодення [6]. Система рівнянь (3.4) у нормальній формі Коші має вигляд

$$\left. \begin{aligned} \dot{X} &= V, X^T = (x, y, z), V^T = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \\ \dot{V} &= \Phi(X) + U, \Phi(X) = \frac{\mu}{r^3} X, r = \sqrt{X^T X}, U^T = (u_x, u_y, u_z) \end{aligned} \right\}. \quad (3.5)$$

### 3.2 Синтез алгоритмів стабілізації довготи точки стояння геостационарного супутника. Метод декомпозиції

ГСС під дією збурюючі впливів, викликаних гравітаційними полями Місяця, Сонця, відмінністю ГПЗ від центрального й т.п., постійно «дрейфує», тобто «відходить» від заданих значень координат ТС. Тому для відбивання цих збурень ГСС оснащуються відповідною системою стабілізації. Для синтезу відповідних алгоритмів стабілізації скористаємося рівняннями (3,3) руху ГСС у центральному ГПЗ, лінеаризованими в точці стояння. При цьому тут будемо нехтувати дією зазначених збурень. Їхній вплив на точність стабілізації ГСС буде оцінено в наступному розділі. З метою зручності формулювання математичної постановки задачі наведемо тут ці рівняння

$$\dot{Z} = AZ + BU, \quad Z^T = (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6). \quad (3.3)$$

Нагадаємо, що компоненти вектора стану  $Z(t)$  в (3.3) являють собою поточні відхилення координат ГСС і його відносних швидкостей від необхідних значень, заданих у грінвічській СК  $z_1 = x - x_S, \quad z_2 = y - y_S, \quad z_3 = z - z_S, \quad z_4 = \dot{x} - \dot{x}_S, \quad z_5 = \dot{y} - \dot{y}_S, \quad z_6 = \dot{z} - \dot{z}_S$ . З урахування сказаного поставимо задачу синтезу керуючих прискорень  $U = U(Z)$  із умови стійкості тривіального розв'язку  $Z(t), \|Z(t)\| \equiv 0$  рівняння (3.3).

Для розв'язання задачі синтезу керування рухом центру мас ГСС скористаємося аналогом методу розв'язання задачі синтезу керування руху КА відносно центру мас. А саме аналогом декомпозиції на кінематичну й динамічну задачі керування орієнтацією, яка запропонована для синтезу керування орієнтацією космічних апаратів в [1] і розвинена в [2,3]. Для цього подамо систему рівнянь (3.3) у вигляді підсистем кінематичних і динамічних рівнянь. Увівши позначення

$$Z = \begin{pmatrix} X \\ V \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = C_1^T Z, \quad V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_4 \\ z_5 \\ z_6 \end{pmatrix} = C_2^T Z, \quad (3.5)$$

де

$$C_1^T = (I_3, O_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, C_2^T = (O_3, I_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

запишемо систему рівнянь (3.3) у вигляді

$$\left. \begin{aligned} \dot{X} &= V, \\ \dot{V} &= \tilde{A}X + \underline{A}V + U. \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

Дотримуючись [1], виберемо «кінематичну» функцію Ляпунова (ФЛ)

$$w_c = \frac{1}{2} X^T X, \quad (3.7)$$

похідна якої згідно з рівняннями (3.6) має вигляд

$$\dot{w}_c = X^T \dot{X} = X^T V. \quad (3.8)$$

Вважаючи в (3.8) швидкість  $V$  керуванням, виберемо «керування»

$$V = V_c = -SX, \quad (3.9)$$

де матриця  $S = S^T > 0$ , наприклад  $S = \text{diag}\{s_{11}, s_{22}\}$ . При цьому похідна ФЛ  $\dot{w}_c = -X^T SX < 0$  і, тому норма вектора відхилення від заданої ТС буде монотонно спадати  $\|X(t)\| \rightarrow 0$ . Далі для завершення розв'язання задачі синтезу стабілізуючого керування виберемо «динамічну» ФЛ у вигляді

$$w_d = \frac{1}{2} (V - V_c)^T (V - V_c). \quad (3.10)$$

Похідна ФЛ (3.10) у силу другого із системи рівнянь (3.6) має вигляд

$$\dot{w}_d = (V - V_c)^T (\dot{V} - \dot{V}_c) = (V - V_c)^T (\tilde{A}X + \underline{A}V + U - \dot{V}_c).$$

Покладаючи тут

$$U = -\tilde{A}X - \underline{A}V + \dot{V}_c - \frac{1}{2\tau} (V - V_c), \quad (3.11)$$

$$\text{Одержуємо} \quad \dot{w}_d = -\frac{1}{2\tau} (V - V_c)^T (V - V_c) = -\frac{1}{\tau} w_d, \quad \tau \dot{w}_d + w_d = 0. \quad (3.12)$$

Зі співвідношення (3.12) випливає, що ФЛ  $w_d$  є експоненціально спадною функцією й у підсумку відхилення МТ від ТС буде спадати  $\|X(t)\| \rightarrow 0$ . З рівняння (3.9) з урахуванням (3.6) випливає

$$\dot{V}_C = -S\dot{X} = -SV. \quad (3.13)$$

Підставивши в (3.11) значення  $V_C$  й  $\dot{V}_C$  з (3.9) і (3.13), послідовно одержуємо

$$\begin{aligned} U &= -\tilde{A}X - \underline{A}V - SV - \frac{1}{2\tau}V - \frac{1}{2\tau}SX, \\ U &= -\tilde{A}X - \frac{1}{2\tau}SX - \underline{A}V - SV - \frac{1}{2\tau}V, \\ U &= -\left(\tilde{A} + \frac{1}{2\tau}S\right)X - \left(\underline{A} + S + \frac{1}{2\tau}I_3\right)V. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Підставивши в (3.14) значення  $X$  й  $V$  з (3.5), одержимо

$$U = C^T Z, C^T = -\left[\left(\tilde{A} + 0,5\tau^{-1}S\right)C_1^T + \left(\underline{A} + S + 0,5\tau^{-1}I_3\right)C_2^T\right]. \quad (3.15)$$

При керуванні  $U$ , що визначається формулою (3.15), з (3.3) одержуємо наступні рівняння замкненої системи

$$\dot{Z} = A_C Z, A_C = (A + BC^T), Z^T = (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6), \quad (3.16)$$

де

$$A_C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0,5\tau^{-1}s_{11} & 0 & 0 & -(s_{11} + 0,5\tau^{-1}) & 0 & 0 \\ 0 & -0,5\tau^{-1}s_{22} & 0 & 0 & -(s_{22} + 0,5\tau^{-1}) & 0 \\ 0 & 0 & -0,5\tau^{-1}s_{33} & 0 & 0 & -(s_{33} + 0,5\tau^{-1}) \end{pmatrix}.$$

Зазначимо, що нехтуючи у формулі для керування (3.11) доданком  $\dot{V}_C$  з рівнянь (5.2) одержуємо рівняння стійкої аперіодичної ланки

$$T\dot{V} + V = V_C, T = 2\tau. \quad (3.17)$$

Рівняння виду (3.17) використовувалося в алгоритмі керування кутовим рухом (орієнтацією) радянсько-російського пілотованого орбітального комплексу «Мир», у якому замість вектора лінійних швидкостей  $V$  був вектор кутової швидкості [4].

### 3.3 Результати обчислювальних експериментів

Для ілюстрації працездатності й ефективності отриманих алгоритмів була розроблена комп'ютерна програма й виконаний ряд обчислювальних експериментів. Нижче наведені результати експериментів по дослідженню характеристик перехідних процесів стабілізації ГСС відносно заданої точки стояння. Координати точки стояння покладалися наступними:  $x_s = r_s \cos 0,25\pi$ ,  $y_s = r_s \sin 0,25\pi$ ,  $z_s = 0$ ,  $r_s = 42164$  км, що відповідає довготі точки стояння  $\lambda_s = 45^\circ$ . Для врахування невизначеності в інформації про параметри системи управління вибиралося у вигляді

$$U = -\alpha \tilde{A}X - \alpha \underline{A}V + \dot{V}_c - \frac{1}{2\tau}(V - V_c), \alpha \in [0,8,1,2], \quad (3.18)$$

що співпадає з управлінням (3.11) при  $\alpha = 1$ .

При цьому у початкових змінних управління й рівняння замкнутої системи мають вигляд

$$U = C^T(\alpha)Z, C^T(\alpha) = -[(\alpha \tilde{A} + 0,5\tau^{-1}S)C_1^T + (\underline{A} + S + 0,5\tau^{-1}I_3)C_2^T], \quad (3.19)$$

$$\dot{Z} = A_c(\alpha)Z, A_c(\alpha) = [A + BC^T(\alpha)], A_c(1) = A_c. \quad (3.20)$$

Перехідні процеси (ПП) при початкових відхиленнях від точки стояння  $Z_0^T = (100, 200, 300, 0, 0, 0)$ , параметрах алгоритму керування  $S = 10^{-4} \text{diag}\{5, 2, 1, 5\}$ ,  $\tau = 2,5 \cdot 10^3$  при  $\alpha = 1$  показано на Рис. 3.1-3.4.

Графіки перехідних процесів, побудовані при різних значеннях  $\alpha \in [0,8,1,2]$  незначно відрізнялися від вищенаведених. Інакше кажучи, результати обчислювальних експериментів ілюструють властивість грубості запропонованого алгоритму управління (3.15) у сенсі Андронова-Понтрягіна [5] або властивість робастності в сучасній термінології.



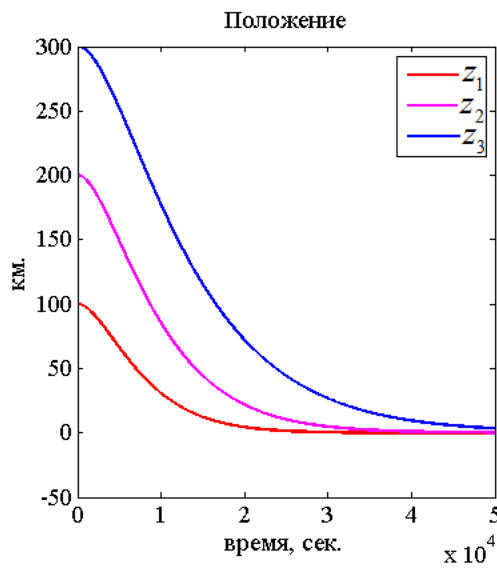


Рис. 3.1 – ПП стабілізації координат ТС  $z_j(t)$

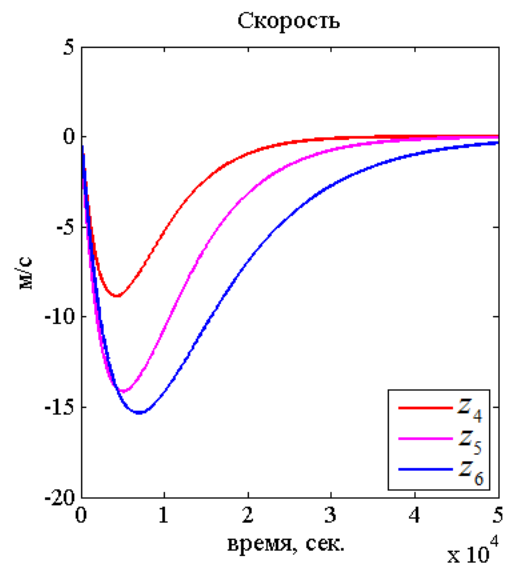


Рис. 3.2 – ПП відносних швидкостей  $z_j(t)$

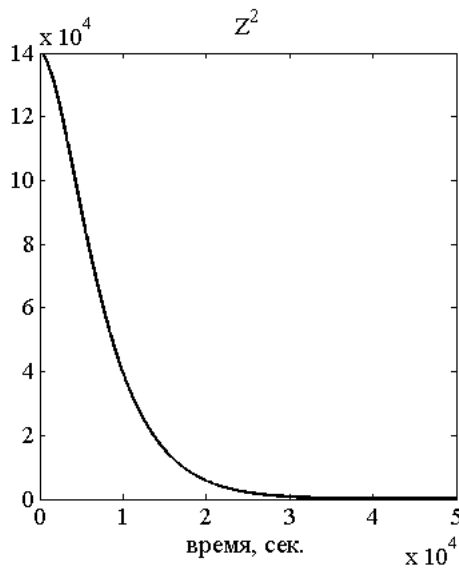


Рис. 3.3  $\delta_z(t) = \|Z(t)\|^2$

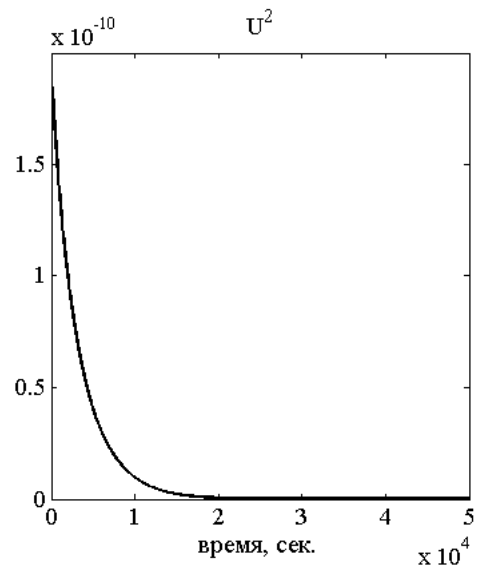


Рис.3.4  $\delta_U(t) = \|U(t)\|^2$

## 4 ГАРАНТОВАНЕ ОЦІНЮВАННЯ ТОЧНОСТІ СТАБІЛІЗАЦІЇ ДОВГОТИ ТОЧКИ СТОЯННЯ ГЕОСТАЦІОНАРНОГО СУПУТНИКА

### 4.1 Постановка задачі

У попередніх розділах у результаті розв'язання задачі синтезу стабілізації ГСС у ТС отримано рівняння динаміки замкнутої системи управління в класі лінійних диференціальних рівнянь (див., наприклад, рівняння (3.16)). При розв'язуванні задачі синтезу не враховувалися такі збурюючі фактори, як відмінність ГПЗ від центрального гравітаційного поля, збурення, викликані Місяцем, Сонцем і ін. Очевидно, що такий отриманий розв'язок задачі синтезу представляється ідеалізованим, уже хоча б тому, що не дає змоги одержати оцінки точності стабілізації в усталеному режимі. Під усталеним режимом тут розуміється широкий клас коливальних процесів, фазові траєкторії яких належать деякій обмеженій множині фазового простору. Конкретними реалізаціями таких процесів можуть бути періодичні або майже періодичні процеси, рекурентні рухи, хаотичні процеси [1-3].

Конкретне урахування впливу навіть окремих з перерахованих збурюючих факторів призводить до істотного ускладнення математичної моделі ГСС, а саме, рівнянь руху МТ. Так, наприклад, урахування впливу одного тільки реального (нецентрального) ГПЗ зажадало б включення в рівняння руху МТ декількох гармонік з існуючих його математичних моделей у вигляді досить громіздких розкладів за сферичними функціях (див., напр. [4]). У той же час у сучасній теорії управління й теорії стійкості на наш погляд існують методи й розділи, що дають змогу одержувати ефективний розв'язок задачі оцінювання точності стабілізації ТС ГСС менш складними обчислювальними методами. Це методи, засновані на гарантованому (синоніми теоретико-множинному або ігровому) підході до математичної інтерпретації невизначеності в рівняннях об'єктів управління. Основи цьому напрямку покладені авторами наступних монографій, збірників, статей [5-11].

У теорії стійкості, яку також можна інтерпретувати як один з найважливіших розділів загальної теорії керування, до цих розділів належить прямий метод Ляпунова дослідження стійкості динамічних систем при постійно діючих обмежених збуреннях.

У цих методах для одержання ефективного розв'язку згаданої задачі використовуються структурно збурені лінійні моделі, які представимо в наступному адаптованому з урахуванням уведених вище позначень і специфіки задачі вигляді

$$\dot{Z} = A_c Z + f(Z, X_s, t), \quad (4.1)$$

де  $Z \in R^n$ ,  $A_c$  – гурвіцева  $(n \times n)$ -матриця,  $f(Z, X_s, t)$  – неконтрольоване обмежене за нормою збурення  $\|f(Z, X_s, t)\| = \|f\| \leq q \forall Z \in R^n, t \geq 0$ ,  $q$  і  $X_s$  – задані константа й вектор параметрів. Тут і всюди далі покладається  $n = 6$ . При цьому під вектором  $X_s$  розуміються координати точки ГСС, а збуренням обмеженої інтенсивності  $\|f(Z, X_s, t)\| \leq q$  інтерпретується відмінність ГПЗ від центрального поля. Очевидно, що система (4.1) дисипативна й у ній при  $t > t_*$ , де  $t_*$  – деяке досить велике число, можуть існувати згадані вище усталені обмежені за деякою нормою процеси  $\|Z(t)\| \leq \mu$ . При цьому константою  $\mu$  визначається величина похибки стабілізації. Нижче наводяться алгоритми її визначення.

## 4.2 Алгоритм еліпсоїдального оцінювання множин досяжності

Розглянемо спочатку спосіб, заснований на еліпсоїдальній апроксимації множин досяжності (МД) динамічних систем (ДС), підданих дії обмежених збурень. Нагадаємо, що під МД ДС у довільний момент часу (неперервного або дискретного) тут розуміється множина фазового простору, у який можуть потрапити в цей момент кінці її траєкторій, що «стартують» з деякої заданої початкової множини при всіх можливих значеннях обмежених зовнішніх збурень.

МД є важливою характеристикою ДС і використовуються при розв'язанні багатьох задач керування ними [7,8]. Однак вони мають досить складну структуру навіть для лінійних систем. Тому використовуються їхні оцінки множинами більш простої структури, а саме опуклими багатогранниками й еліпсоїдами. Існує досить велика кількість робіт, присвячених задачам еліпсоїдальної апроксимації МД систем виду (4.1), включаючи роботи з урахуванням обмежених параметричних збурень матриці  $A_c$  й інших обмежень. Укажемо тут тільки прості конструктивні алгоритми, що досить повно враховують особливості розглянутої тут постановки задачі [11,12]. Будемо припускати, що вектор-функція збурення  $f(\cdot)$  задовольняє обмеження

$$f^T(\cdot)Gf(\cdot) = \|f\|_G^2 \leq q^2, G = G^T > 0 \quad (4.2)$$

при всіх значеннях її аргументів і введемо в розгляд еліпсоїди виду

$$E(t) = E[\hat{Z}(t), H(t)] = \{Z \in R^n : \sigma[\hat{Z}(t), H(t)] \leq 1\}, \quad (4.3)$$

де  $\sigma[\hat{Z}(t), H(t)] = [Z - \hat{Z}(t)]^T H^{-1}(t)[Z - \hat{Z}(t)]$ ,  $H = H^T > 0$ . При цьому має місце наступне

**Твердження.** Оцінка зверху МД динамічної системи (4.1), (4.2) еліпсоїдами  $E[\hat{Z}(t), H(t)]$  виду (4.3) визначається розв'язками задачі Коші для диференціальних рівнянь

$$\frac{d\hat{Z}}{dt} = A_c \hat{Z}, \quad (4.4)$$

$$\frac{dH}{dt} = A_c H + H A_c^T + q \left[ \sqrt{\frac{SpG^{-1}}{SpH}} H + \sqrt{\frac{SpH}{SpG^{-1}}} G^{-1} \right] \quad (4.5)$$

при заданому початковому еліпсоїді  $E[\hat{Z}(t_0), H(t_0)]$ , такому, що  $Z(t_0) \in E[\hat{Z}(t_0), H(t_0)]$ . Для гурвіцевої матриці  $A_c$  асимптотичний еліпсоїд  $E_\infty = E[0, H_\infty] = E[\hat{Z}(t), H(t)]$  при  $t \rightarrow \infty$  визначає гарантовану оцінку усталеної точності системи.

Наведений у Твердженні алгоритм дозволяє будувати як поточні гарантовані множинні оцінки зверху точності стабілізації ТС, так і оцінку зверху її усталеної точності. Інакше кажучи, дозволяє будувати поточні еліпсоїдальні

оцінки МД системи (4.1), (4.2), сукупність яких утворює в її фазовому просторі зовнішню апроксимацію інтегральних ліжок або трубок траєкторій [13-15].

### 4.3 Алгоритм оцінювання граничної множини прямим методом Ляпунова

Розглянемо тепер спосіб одержання оцінки точності стабілізації ТС ГСС, заснований на відомих узагальненнях [16-18] прямого методу Ляпунова дослідження стійкості розв'язків диференціальних рівнянь на дослідження властивостей стійкості обмежених множин у їхньому фазовому просторі й конкретно на властивість стійкості такої множини для лінійної структурно збуреної системи (4.1), (4.2). При цьому в якості оцінки точності може використовуватися гранична множина системи. Нагадаємо, що під граничною множиною ДС розуміється множина в її фазовому просторі, у яку попадають (або до якої необмежено наближаються) усі її фазові траєкторії (дисипативність у цілому) або ті, що стартують із певної області (дисипативність в області). Однак, граничні множини, як і МД, можуть мати досить складну структуру. Тому використовуються їхні апроксимації зверху деякими опуклими множинами, наприклад, поверхнями рівнів функцій Ляпунова (ФЛ). При найчастіше використовуваних ФЛ у вигляді квадратичної форми фазових координат апроксимаціями граничних множин ДС, як і МД, будуть еліпсоїди в їхніх фазових просторах.

Розглянемо конкретну задачу одержання еліпсоїдальної оцінки зверху  $\mu^2$  граничної множини  $M$  системи (4.1), для якої  $Z(t) \in M \forall t \geq t_*$  при  $Z(t_*) \in M$ . Для її розв'язання скористаємося відомими узагальненнями [16-18] прямого методу Ляпунова на дослідження стійкості інваріантних (граничних) множин і виберемо ФЛ

$$v = Z^T P Z, \quad (4.6)$$

де  $P$  – симетрична додатно визначена  $n \times n$ -матриця  $P = P^T \succ 0$ . При цьому похідна функції Ляпунова в силу рівняння (4.1) має вигляд

$$\dot{v}(Z) = Z^T (A_C^T P + P A_C) Z + 2 f^T(\cdot) P Z. \quad (4.7)$$

Оскільки матриця  $A_C$  гурвіцева, то матричне рівняння Ляпунова

$$A_C^T X + X A_C = -C \quad (4.8)$$

має розв'язок  $X = X^T = P, P = P(C)$  при будь-якій матриці  $C = C^T \succ 0$ . З урахуванням сказаного одержуємо

$$\dot{v}(x) = -Z^T C Z + 2 f^T(\cdot) P(C) Z. \quad (4.9)$$

З (4.9) одержуємо оцінку

$$\dot{v}(Z) \leq -\lambda_m(C) \|Z\|^2 + 2 \|f\| \|P(C)\| \|Z\|, \quad (4.10)$$

де  $\lambda_m(C)$  – мінімальне власне значення матриці  $C$ . Прирівнюючи праву частину нерівності (4.10) до нуля, знаходимо

$$\|Z\| = \rho, \quad \rho = 2 \frac{\|f\| \|P(C)\|}{\lambda_m(C)}. \quad (4.11)$$

Співвідношеннями (4.9) 6.9) - (4.11) визначається множина  $N = N(C)$

(заштрихована на рисунку 4.1)  $N = \{Z : \|Z\| \leq \rho\}$ , така, що  $\dot{v}(Z) < 0$  при  $\|Z\| > \rho$ , тобто

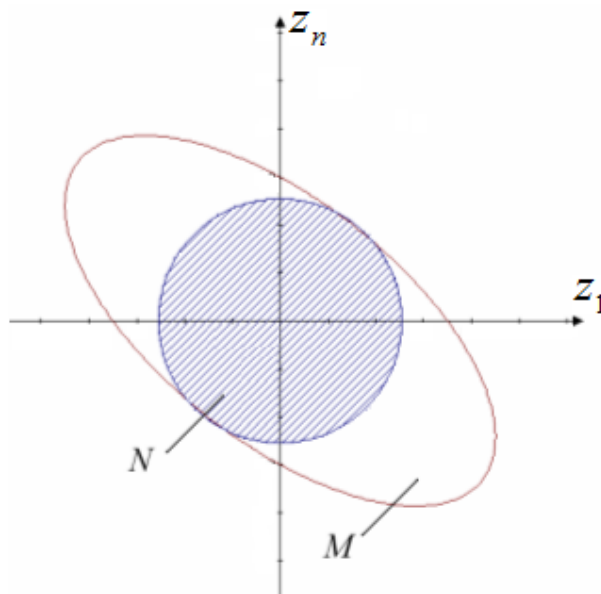


Рис. 4.1 – Ілюстрація оцінювання граничної множини

З [16-18] і Рис. 4.1 випливає, що оцінка зверху граничної множини  $M$  визначиться співвідношенням  $M = \{Z : v(Z) \leq \mu^2(C)\}$ , де

$$\mu^2(C) = \max_{Z \in N(C)} v(Z) = \psi(C), \psi(C) = 4 \frac{q^2}{\lambda_m^2(C)} \|P(C)\|^3. \quad (4.12)$$

де  $\lambda_m(C)$  – мінімальне власне значення матриці  $C$ ,  $P(C)$  – матриця, яка визначається з розв'язку матричного рівняння Ляпунова (4.8). У якості норми  $P(C)$  можна вибрати максимальне власне значення  $\lambda_M\{P(C)\}$  матриці  $P(C)$  або, що в обчислювальному плані простіше, її евклідову норму [19]  $\|P(C)\|_E = \{Sp[P^T(C)P(C)]\}^{\frac{1}{2}}$ . Детальний виклад алгоритму одержання еліпсоїдального оцінювання граничної множини (множинної оцінки точності стабілізації) динамічних систем виду (4.1), (4.2) і можливий підхід до його оптимізації міститься в [12,13]. Там же на прикладі оцінювання керування кутовим рухом твердого тіла (плоска задача) ілюструється доцільність спільного використання множин досяжності й граничних множин для оцінювання точності системи керування (алгоритму керування) в усталеному режимі. Зазначено також простий конструктивний алгоритм проектування еліпсоїдів виду (4.3) у просторі  $R^n$  на його довільний підпростір [20]. Зокрема, алгоритм дозволяє одержувати інтервальні оцінки точності за кожною з компонент вектора  $Z$  й, зокрема, за компонентами  $z_1 = x - x_s, z_2 = y - y_s, z_3 = z - z_s, x_s = r_s \cos \lambda_s, y_s = r_s \sin \lambda_s, z_s = 0$ , де  $r_s = 42164$  км і  $\lambda_s$  радіус ГСО і задана довгота ТС. Отримані інтервальні оцінки дозволяють безпосередньо одержати розв'язок розглянутої в [21] задачі оцінювання досяжної точності стабілізації ТС ГСС.

#### 4.4. Приклад оцінювання точності стабілізації

Проілюструємо зміст і ефективність застосування запропонованих методів оцінювання точності стабілізації на наочному прикладі [12,13].

Будемо досліджувати ефективність алгоритмів оцінювання МД на прикладі оцінювання точності стабілізації в плоскій задачі керованого кутового руху твердого тіла. Проведемо зіставлення отриманого розв'язку з розв'язком, одержуваним з використанням апарата функцій Ляпунова. Під оцінкою точності в першому випадку розуміється еліпсоїд виду (4.3)  $E_\infty = E[0, H_\infty]$ , що визначається усталеним значенням матриці  $H(t)$  при досить великих значеннях часу в рівняннях (4.4), (4.5). У другому випадку оцінка точності визначається оцінкою граничної множини системи. Нагадаємо, що під граничною множиною ДС розуміється множина в її фазовому просторі, у яку попадають (або до якої необмежено наближаються) усі її фазові траєкторії [16-18]. Для визначеності розглянемо керування каналом тангажа. При цьому система рівнянь має вигляд

$$\dot{\theta} = \omega_3, J\dot{\omega}_3 = u_3 + f_3(t), u_3 = -\tilde{\alpha}\theta - \tilde{k}_3\omega_3, \quad (4.13)$$

де  $\theta, \omega_3$  й  $J_3$  – кут тангажа, кутова швидкість і момент інерції, відповідно,  $u_3$  і  $f_3(t)$  – керуючий момент і неконтрольоване обмежене збурення. Представимо систему рівнянь (4.13) у вигляді

$$\dot{Z} = A_c Z + f(Z, t), f^T(Z, t)Gf(z, t) = \|f\|^2 \leq q^2, \quad (4.14)$$

де

$$A_c = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha & -k_3 \end{pmatrix}, Z = \begin{pmatrix} \theta \\ \omega_3 \end{pmatrix}, f(Z, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ f_3(t) \end{pmatrix}, \alpha = J_3^{-1}\tilde{\alpha}, k_3 = J_3^{-1}\tilde{k}_3.$$

Для побудови МД системи (4.14) використовувалися рівняння (6.4), (6.5) з вищенаведеного твердження. При виконанні комп'ютерного моделювання еволюції динаміки МД системи (4.14) були обрані наступні значення її параметрів і початкових умов:  $\alpha = 2, k_3 = 2, q = 0.1, G = I_2, \hat{Z}(0) = (5, 2)^T, H(0) = I_2$ . «Неконтрольоване» збурення покладалося рівним  $f_3 = q \sin(\lambda t)$ , де частота  $\lambda$ , покладалася рівною резонансній частоті системи. При цьому «невідомий» дійсний вектор початкового стану покладалася рівним  $Z^*(0) = (4.5, 2.5)^T$ .

На рис. 4.2 зображена дискретна апроксимація інтегральної лійки [15] системи (4.14). Вона являє собою послідовність еліпсоїдальних оцінок МД, побудованих через проміжок часу 0.1 с. Кожному еліпсоїду належить істинний



вектор стану  $Z^*(t)$  системи у відповідний момент часу. Істинна фазова траєкторія системи зображена на рисунку жирною лінією.

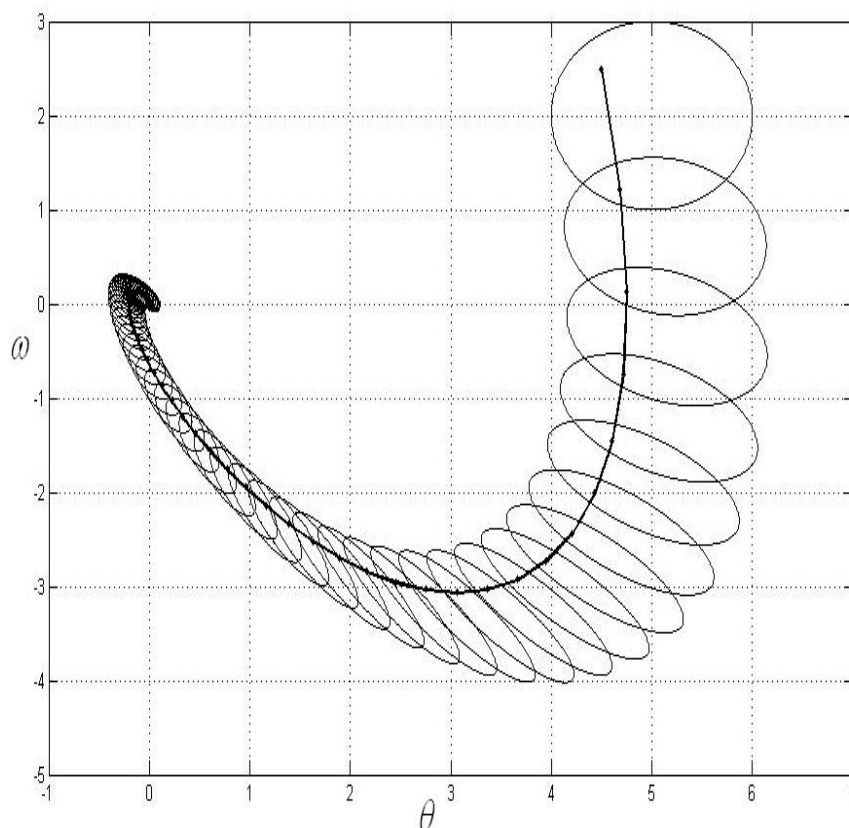


Рис. 4.2 – Зміна апроксимуючих еліпсоїдів у часі

З рисунка видно, що еліпсоїд-оцінка множини досяжності системи в асимптотиці приходить до деякого усталеного значення  $M_\infty = E_\infty$ , яке й визначає гарантовану оцінку точності стабілізації системи.

Одержимо тепер оцінку граничної множини системи (4.14), що за визначенням також є й оцінкою точності системи в усталеному режимі. Скористаємося для цього відомими узагальненнями [16-18] прямого методу Ляпунова на дослідження стійкості множин і виберемо функцію Ляпунова у вигляді квадратичної форми  $v(Z) = Z^T P Z$ ,  $P = P^T > 0$ . Похідна функції Ляпунова, обчислена згідно з рівнянням (4.14), має вигляд

$$\dot{v}(Z) = Z^T (A_C^T P + P A_C) Z + 2f^T P Z \quad . \quad (4.15)$$

Оскільки матриця  $A_C$  гурвіцева, то матричне рівняння Ляпунова  $A_C^T P + P A_C = -C$  має розв'язок  $P > 0$  при будь-якій матриці  $C = C^T > 0$ . Покладаючи для визначеності матрицю  $C = I_2$ , знаходимо розв'язок рівняння Ляпунова

$$P = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \alpha^{-1} k_3 + k_3^{-1} (1 + \alpha) & \alpha^{-1} \\ \alpha^{-1} & \alpha^{-1} k_3^{-1} (1 + \alpha) \end{pmatrix}.$$

Знайдемо множину фазового простору системи (4.14), на якій  $\dot{v}(x) \leq 0$ . Скориставшись співвідношенням (4.15), знаходимо оцінку

$$\dot{v}(x) \leq -\|x\|^2 + 2\|f\| \cdot \|Px\| \leq -\|x\|^2 + 2q\lambda_{\max}(P)\|x\| \leq 0, \quad (4.16)$$

де  $\lambda_{\max}(P)$  – максимальне власне значення матриці  $P$ . З нерівностей (4.16) одержуємо, що  $\dot{v}(x) \leq 0$  на множині  $\|x\| \geq \rho$ ,  $\rho = 2q\lambda_{\max}(P)$ . Згідно з [16-18] граничною множиною системи (4.14) буде множина, обмежена поверхнею рівня функції Ляпунова  $v(x) \leq \mu^2$ , де  $\mu^2 = \max_{\|x\|=\rho} v(x)$ . Скориставшись оцінками значень квадратичних форм на кулі одиничного радіуса [19], одержуємо  $\mu^2 = 4q^2 \lambda_{\max}^3(P)$ . У такий спосіб одержуємо, що оцінкою зверху граничної множини системи (4.14) є множина

$$M_\infty = \{Z : Z^T P Z \leq \mu^2, \mu^2 = 4q^2 \lambda_{\max}^3(P)\}. \quad (4.17)$$

На Рис. 4.3 наведені еліпсоїдальна оцінка асимптотики множини досяжності  $E_\infty$  системи й оцінка її граничної множини  $M_\infty$ , зображені відповідно суцільною і штриховою лініями.

Проектуючи отримані еліпсоїди на осі координат згідно з [20] можна одержати гарантовані інтервальні не зв'язані оцінки точності керування за кожною з координат (за кутом і кутовою швидкістю) окремо, що становлять найбільший інтерес.

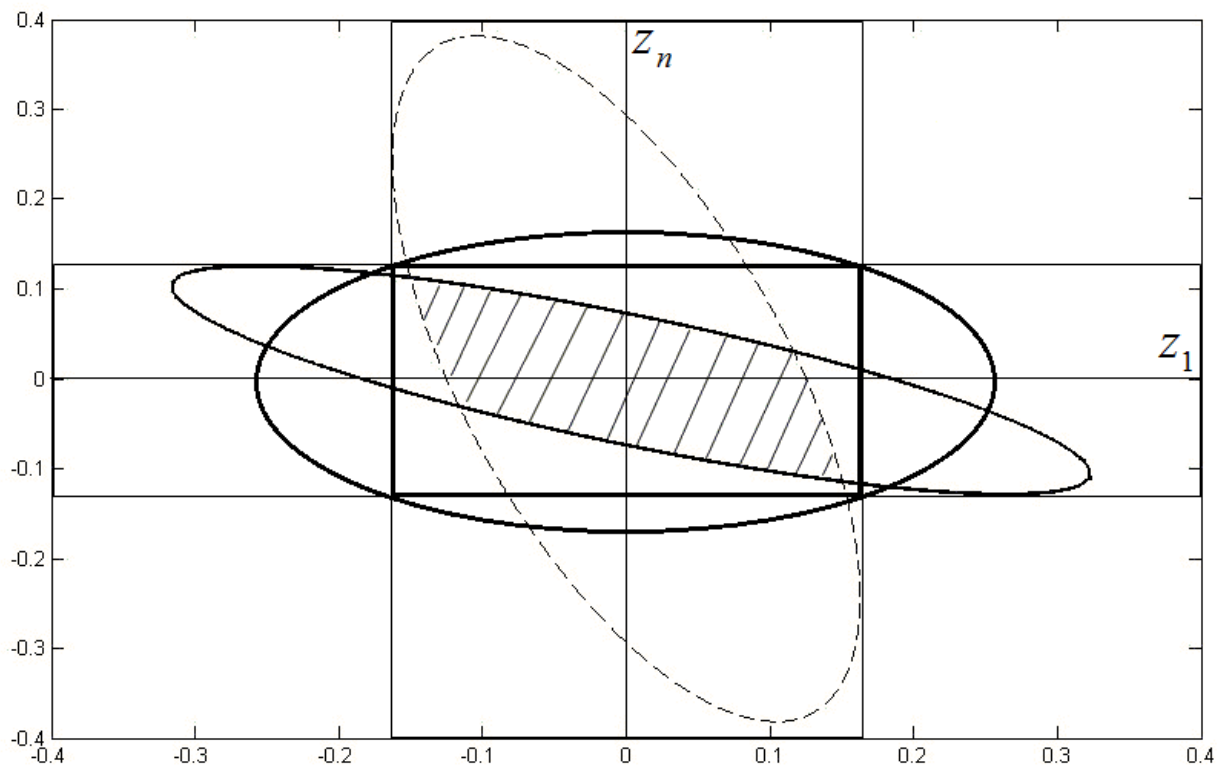


Рис.4.3 – Оцінка граничної множини (штрихова лінія) системи і асимптотики оцінки її множини досяжності (суцільна лінія)

З рисунка безпосередньо видно, що перетин інтервальних оцінок істотно менший від кожної з них. Тому для оцінки точності системи доцільно використовувати не тільки еліпсоїдальні оцінки граничної множини, але й оцінки МД системи.

## ВИСНОВКИ

1. Отриманий аналітичний розв'язок задачі визначення оптимального управління як для сімейств лінійних, так і нелінійних систем в поєднанні з використанням узагальнення дискретного аналога прямого методу Ляпунова на клас нелінійних різницевих включень дозволили виконати якісний аналіз стійкості керованого сімейства нелінійних систем і запропонувати умови їх робастної стійкості «в області», які легко перевіряються.

2. Використання достатньої умови стійкості сімейства лінійних дискретних систем (принципу стиснених відображень) дозволило запропонувати конструктивний метод перевірки цієї умови.

3. Запропонована математична модель керованого просторового руху супутника в геоцентричній обертовій (грінвічській) системі координат(СК). Керуючі прискорення, створювані маршовими двигунами, задаються безпосередньо в цій же СК. Це дало змогу на даному етапі досліджень одержати розв'язки задач синтезу керувань рухом центру мас супутника без використання зв'язаної із супутником СК і задання в ній параметрів напрямку вектора тяги (орієнтації) маршових двигунів.

4. Отримано лінійне представлення отриманої моделі в околі точки стояння геостационарного супутника (ГСС), показана її керованість.

5. За аналогією з розв'язком задач синтезу керування орієнтацією проведена декомпозиція вихідної задачі керування рухом центру мас на кінематичну й динамічну задачі. Отриманий розв'язок задачі синтезу стабілізації точки стояння ГСС на основі прямого методу Ляпунова. Проведені обчислювальні експерименти проілюстрували працездатність і ефективність запропонованого алгоритму, у тому числі й алгоритму стабілізації, отриманого на основі нелінійної моделі.

6. Запропонована нова модель урахування впливу на точність системи стабілізації довготи ТС обмежених збурень, викликаних відмінністю гравітаційного поля Землі (ГПЗ) від центрального поля й інших збурюючих

факторів. Вона отримана на основі використання загального принципу сучасної теорії керування — гарантованої інтерпретації невизначеності (обмежених параметричних і структурних збурень) у математичних моделях керованих систем. Модель представлена в класі структурно збурених систем лінійних диференціальних рівнянь із довільною обмеженою збурюючою нелінійною вектор-функцією фазових координат і часу. З використанням даної моделі запропоновані алгоритми гарантованого еліпсоїдального оцінювання точності системи в усталеному режимі. Алгоритми засновані на розвинутих методах еліпсоїдального оцінювання МД динамічних систем з постійно діючими обмеженими збуреннями та відомих узагальненнях прямого методу Ляпунова для оцінювання їх граничних множин. На конкретному ілюстративному прикладі керування орієнтацією космічного апарата показано, що спільне використання методів оцінювання МД і граничних множин дає змогу одержати кращу гарантовану оцінку точності, чим кожний з них окремо.

**ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ****До Вступу і розділів 1 та 2**

1. Харитонов В.Л. Асимптотическая устойчивость положения равновесия семейства систем линейных дифференциальных уравнений // Диф. уравнения. — 1978. — С. 2086–2088.
2. Bartlett A.C., Hollot C.V., Lin H. Root location of an entire polytope of polynomials: it suffices to check the edges // Math. Contr. Sig. Syst. — 1988. — **1**. — P. 61–71.
3. Barmish B.R., Kang A. Survey of extreme point results for robustness of control systems // Automatica. — 1993. — **29**, N 1. — P. 13–35.
4. Nemirovskii A.A. Several NP-hard problems arising in robust stability analysis // Math. Contr. Sig. Syst. — 1994. — **6**. — P. 99–105.
5. Жолен Л, Кифер М., Дидри О., Вальтер Э. Прикладной интервальный анализ. — М.: Ижевск: Ин-т компьютер. исследований, 2005. — 468 с.
6. Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. — М.: Наука, 1977. — 392 с.
7. Schweppe F.C. Recursive state estimation: unknown but bounded error and system inputs // IEEE Trans. Automat Control. — 1968. — **AC-13**, N 1. — P. 22–28.
8. Черноусько Ф.Л. Оценивание фазового состояния динамических систем. Метод эллипсоидов. — М.: Наука, 1988. — 320 с.
9. Поляк Б.Т., Щербаков П.С. Робастная устойчивость и управление. — М.: Наука, 2002. — 273 с.
10. Кунцевич В.М. Управление в условиях неопределенности: гарантированные результаты в задачах управления и идентификации. — Киев: Наук. думка, 2006. — 264 с.
11. Blanchini F., Miani S. Set-theoretic methods in control. — Boston: Birkhauser, 2008. — 481 p.

12. Kogan J. Robust stability and convexity. — London: Springer-Verlag, 1995. — 176 p.
13. Abrishamchian M., Barmish B. Reduction of robust stabilization problem to standard  $H^\infty$  problems for classes of systems with unstructured uncertainty // Automatica. — 1996. — **32**, N 8. — P. 1101–1115.
14. Мазко А.Г. Робастная устойчивость и стабилизация динамических систем. Методы матричных и конусных неравенств // Праці Інституту математики НАН України. Математика та її застосування. — 2016. — **102**. — 332 с.
15. Зубов В.И. Лекции по теории управления. — М.: Наука, 1975. — 494 с.
16. Волосов В.В. К построению параметрических семейств эллипсоидальных оценок и их оптимизации в задачах нестохастической идентификации параметров и состояния многомерных дискретных объектов управления // Проблемы управления и информатики. — 1996. — № 4. — С. 37–53.
17. Цыпкин Я.З., Поляк Б.Т. Робастная устойчивость линейных систем // Итоги науки и техники. Сер. Техническая кибернетика. — 1991. — **32**. — С. 3–31.
18. Лурье А.И., Постников В.Н. К теории устойчивости регулируемых систем // Прикладная математика и механика. — 1944. — **8**, вып. 3. — С. 246–248.
19. Айзерман М.А., Гантмахер Ф.Р. Абсолютная устойчивость регулируемых систем. — М.: Изд-во АН СССР, 1963. — 261 с.
20. Кунцевич В.М. Управление семейством нелинейных динамических систем при измерениях с ограниченными помехами // Труды ИММ УрО РАН. — 2014. — **20**, № 4. — С. 180–186.
21. Барбашин Е.А. Функции Ляпунова. — М.: Наука, 1978. — 287 с.
22. Кунцевич А.В., Кунцевич В.М. Устойчивость в области нелинейных разностных включений // Кибернетика и системный анализ. — 2010. — № 5. — С. 11–17.
23. Кунцевич В.М., Куржанский А.Б. Области достижимости линейных и некоторых классов нелинейных дискретных систем и управление ими // Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики». — 2010. — № 1. — С. 5–21.

### До розділу 3

1. Бранец В.Н., Шмыглевский И.П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. – М.: Наука, 1973. - 320 с.
2. Волосов В.В. Об управлении ориентацией космического аппарата в орбитальной системе координат с использованием эллипсоидальных оценок его вектора состояния // Проблемы управления и информатики, 1998, № 5. – С. 31–41.
3. Волосов В.В., Шевченко В.Н. Синтез алгоритмов управления ориентацией космического аппарата на основе обобщений прямого метода Ляпунова // Проблемы управления и информатики. – 2017.– № 5. – С. 106–117.
4. Сарычев В.А., Беляев М.Ю., Зайков С.Г., Сазонов В.В., Тесленко Б.П. Математическое моделирование эйлеровых разворотов орбитального комплекса “Мир” гиродинами // Космические исследования. - 1991.- т. 29, вып.4. -С. 532-543.
5. Андронов А.А., Понтрягин Л. С.Грубые системы // Доклады Академии Наук СССР. — 1937. — Т. 14. — №5. — С. 247-250.

### До розділу 4

1. В.И. Зубов Аналитическая динамика системы тел. – Ленинград, Изд. Ленинград. Ун-та, 1983. 344 с.
2. Д. Биркгоф Динамические системы. – Изд. дом «Удмуртский ун-тет», 1999. – 408с.
3. Белецкий В.В. Регулярные и хаотические движения в задаче ориентации спутника - Препринт № 53. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша АН СССР, 1990.
4. Дубошин Г.Р. Небесная механика Основные задачи и методы. – М.: Наука, 1968, 800 с.
5. Красовский Н.Н. Теория управления движением. – М.: Наука, 1968.– 475 с.
6. Schweppe F.C. Recursive state estimation: unknown but bounded error and system inputs // IEEE Trans. Automat. Control.– 1968.– AC-13.– №1.– P. 22-28.



7. Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. – М.: Наука, 1977. – 392 с.
8. Избранные труды А.Б. Куржанского. – М.: Изд-во МГУ, 2009. – 756 с.
9. Черноусько Ф.Л. Оценивание фазового состояния динамических систем. Метод эллипсоидов. – М.: Наука, 1988. – 320 с.
10. Bounding approaches to system identification (Edited by Mario Milanese, John Norton, Helene Piet-Lahanier, Eric Walter). New York: Plenum Press. – 1996. – 565p.,
11. Кунцевич В.М. Управление в условиях неопределенности: Гарантированные результаты в задачах управления и идентификации. – К.: Наукова думка, 2006. – 264 с.
12. Бабий Н.А., Волосов В.В. Шевченко В.Н. Внешние эллипсоидальные аппроксимации множеств достижимости динамических систем // Кибернетика и вычислительная техника – 2014– вып. 177– С. 16 –27.
13. Звіт про науково-дослідну роботу «Розробка методів адаптації математичних моделей складних динамічних систем і методів синтезу керування ними», ІКД НАНУ-ДКАУ, 2016.
14. A.V. Kurzhanski and I. Vdlyi. *Ellipsoidal Calculus for Estimation and Control*, Birkhauser, Boston, 1997.
15. Ушаков В.Н., Матвийчук АР., Ушаков А.В. Аппроксимация множеств достижимости и интегральных воронок дифференциальных включений // Вестн. Удмуртского ун-та.– 2011.– Вып. 4. –С.23–39.
16. Зубов В.И. Устойчивость движения.– М.: Высшая школа, 1973.– 272с.
17. Красовский Н.Н. Обобщение теорем второго метода Ляпунова // Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. – М.: Наука, 1966. – С. 463– 467.
18. Кунцевич В.М., Лычак М.М. Синтез систем автоматического управления с помощью функций Ляпунова. – М.: Наука, 1978.– 400 с.
19. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. – М.:Наука, 1984. – 320 с.

20. Волосов В.В., Калита А.С. Исследование алгоритма одновременного оценивания фазового состояния и параметров дискретного динамического объекта // Кибернетика и вычисл. техника. –1988. – вып.79. –С.23-28.
21. Жодзинский А.И., Махненко Ю.Ю. Оценки достижимой точности удержания спутников связи на геостационарной орбите // Электросвязь, 2002, №8.-С. 18-21.