ЗАТВЕРДЖУЮ

ЗВІТ
ПРО НАУКОВО – ДОСЛІДНУ РОБОТУ

ТУРБУЛЕНТНІ ТА ДИФУЗІЙНІ ВЛАСТИВОСТІ НАВКОЛОЗЕМНОЇ ПЛАЗМИ ІЗ СУПУТНИКОВИХ ВИМІРІВ

2015

СПИСОК АВТОРІВ

Керівник НДР
д.ф.-м. н., проф. О.К. Черемних

Відп. вик.
к.ф.-м. н. доц., Л. В. Козак

РЕФЕРАТ

Звіт про НДР: __72__с., __31__ рис., _2__табл., __44___джерел.

Об’єкт дослідження: навколоземна плазма.

Мета роботи: аналіз турбулентних та дифузійних процесів в навколоземному середовищі.

Методи дослідження: математичний, статистичний, фрактальний спектральний та вейвлет аналіз.

В рамках звіту розглянуто особливості взаємодії сонячного вітру із магнітосферою Землі. Вказано на цілу низку процесів в області ударної хвилі. Проведено порівняння модельних розрахунків стрибків МГД параметрів на фронті ударної хвилі. Проаналізовано можливість формування форшокової області та вказано на поведінку параметрів у магнітошарі. Відмічається, що модель Спрайтера досить добре узгоджується із експериментальними даними.

Проведено детальний розгляд властивостей дрібномасштабної розвиненої турбулентності. Розглянуто: основні гіпотези; особливості фрактального підходу; β - модель; біфрактальну та мультифрактальну моделі; характерні припущення і закономірності логпуассоновських моделей, порівняно різні моделі та визначено передумови їх використання. Введено ієрархічний базис для турбулентних полів та відмічено його зв'язок із Фур’є та вейвлет аналізом.

Розглянуто ферозондові вимірювання магнітного поля космічними апаратами С1 та С2 (місія „Кластер-2”) із частотою опитування 22.5 Гц за 2004 – 2014 рр. (20 подій).

Визначено, що при перетині УХ не лише зростає інтенсивність флуктуацій, але змінюється і їх структура: при переході від квазіпаралельної до квазіперпендикулярної УХ, рівень варіацій магнітного поля в магнітошарі сильно знижується. Амплітуда флуктуацій в МШ відразу ж після перетину УХ у декілька разів перевищує амплітуду флуктуацій в незбуреному СВ.

Результати порівняння лінійного фрактального аналізу із спектральним аналізом для форшокової області показали, що фрактальний аналіз є більш стабільним і локалізованим в часі в порівнянні з Фур'є аналізом.

Із аналізу зміни висоти функції розподілу густини ймовірності флуктуацій магнітного поля відмічається наявність переміжності в перехідних областях Землі на відміну від процесів в спокійному сонячному вітрі. Знайдено для області магнітошару мультифрактальний спектр. В результаті ESS-аналізу отримано що турбулентні процеси в плазмі сонячного вітру близькі до двовимірної моделі Ірошнікова-Крейчнана, а в середині магнітошару – описуються ізотропною логпуасонівською каскадною моделлю.

Результати як вейвлет аналізу так і віконного Фур’є перетворення вказують на наявність каскадних процесів.

Результати НДР впроваджено: в навчальний процес фізичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

ТУРБУЛЕНТНІ ПРОЦЕСИ, МАГНІТОСФЕРА, СОНЯЧНИЙ ВІТЕР, СТАТИСТИЧНИЙ АНАЛІЗ, МОДЕЛІ ДЛЯ ОПИСУ ТУРБУЛЕНТНИХ ПРОЦЕСІВ.

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ ТА СКОРОЧЕНЬ

1. ESS – Extended Self-Similarity (розширена самоподібність)
2. GSE – Geocentric Solar Ecliptic (геоцентрична система координат сонячної екліптики
3. PDF – probability distribition function (функція густини ймовірності)
4. RSD – відносне стандартне відхилення
5. UT – universal time (всесвітній час)
6. ІК – модель Ірошнікова-Крейчнана
7. К41 – модель Колмогорова 1941 року
8. К62 – модель Колмогорова 1962 року
9. ВМ – внутрішня магнітосфера
10. КА – космічний апарат
11. МГД – магнітогідродинаміка
12. ММП – міжпланетне магнітне поле
13. МП – магнітопауза
14. МШ – магнітошар
15. ПШ – постшокова область
16. СВ – сонячний вітер
17. ТПШ – турбулентний пригарничний шар
18. УХ – ударна хвиля
19. ФШ – форшок
20. ШЛ – тривимірна ізоторопна лог-пуассонівська модель турбулентності з параметрами Ше і Левека

ВСТУП

Супутникові експерименти показують, що в перетворенні динамічної і магнітної енергії сонячного вітру в енергію заряджених частинок і електромагнітного поля різних масштабів, що заповнюють магнітосферу, особливу роль відіграють динамічні утворення в пограничних областях магнітосфери. Це ударна хвиля, що відійшла, в лобовій частині магнітосфери, магнітошар – надзвичайно активна область між ударною хвилею і межею магнітосфери, і власне межа – магнітопауза, в якій у свою чергу, виділяють особливі області: касп, турбулентний пограничний шар, пограничний шар на межі геомагнітного хвоста та ін. Всі ці області характеризуються високим рівнем електромагнітної турбулентності, магнітними переоб’єднаннями, інтенсивними конвективними рухами і локальним прискоренням частинок. При цьому магнітошар виявляється не просто однорідною турбулентною областю, а структурованим утворенням зі складною динамікою, що визначається як зовнішніми параметрами СВ і міжпланетного магнітного поля (ММП), так і внутрішніми процесами.

В рамках звіту (**розділ 1**) розглянуто особливості взаємодії сонячного вітру із магнітосферою Землі. Вказано на цілу низку процесів в області ударної хвилі.

Проведено порівняння модельних розрахунків стрибків гідродинамічних параметрів на фронті ударної хвилі. Розглянуто механізми які впливають на укручення хвильового фронту та проведено порівняння між квазіперпендикулярними та квазіпаралельними ударними хвилями. Проаналізовано можливість формування форшокової області та вказано на поведінку параметрів у магнітошарі. Відмічається, що модель Спрайтера, що використовуєть для моделювання стрибків параметрів в околі ударної хвилі досить добре узгоджується із експериментальними даними.

В рамках звіту (**розділ 2**) проведено детальний розгляд властивостей дрібномасштабної розвиненої турбулентності. При цьому розглянуто, як основні гіпотези, так і характерні припущення і закономірності різних моделей опису розвиненої турбулентності від колмогорівської до логпуассоновських та проведено порівняння між різними моделями і визначено передумови їх використання.

Опис відібраних для розгляду супутникових даних та порівняння між квазіпаралельними та квазіперпендикулярними ударними хвилями зроблено в **розділі 3**.

Остання чатина звіту (**розділ 4**) присвячена обробці супутникових вимірів різними методиками і підходами. Значну увагу приділено порівнянню отриманих різними методами результатів.

1. ВЗАЄМОДІЯ СОНЯЧНОГО ВІТРУ З ЗОВНІШНЬОЇ МАГНІТОСФЕРОЮ ЗЕМЛІ

Границя магнітосфери Землі розташована далеко від поверхні планети, де газова оболонка сильно розріджена і всі основні процеси визначаються електродинамічними процесами в плазмі без зіткнень. Положення границі магнітосфери по суті визначається балансом магнітного тиску стисненого магнітного поля планети і динамічного тиску з боку сонячного вітру (СВ). Як правило, це тиск протонів СВ, однак і міжпланетне поле дає суттєвий внесок у формування кордону між СВ і власне магнітосферою. Нормальна до границі компонента тиску в СВ зменшується при видаленні в напрямку від Сонця. Магнітосфера не ізольована від СВ, і через її поверхню від лобової частини до хвоста йде надходження енергії і імпульсу і відбувається обмін речовиною з СВ. Саме ці процеси визначають стан навколоземного космічного простору. Супутникові експерименти показують, що в перетворенні динамічної та магнітної енергії сонячного вітру в енергію заряджених частинок і електромагнітного поля різних масштабів, що заповнюють магнітосферу, особливу роль грають динамічні утворення в прикордонних областях магнітосфери. Це ударна хвиля, яка відійшла в лобовій частині магнітосфери, магнітошар – надзвичайно активна область між ударною хвилею і кордоном магнітосфери, і власне межа – магнітопауза, яка в свою чергу, виявляє особливі області: касп, турбулентний пограншар , пограншар на кордоні геомагнітного хвоста. Всі ці області характеризуються високим рівнем електромагнітної турбулентності, магнітним перез'єднання, інтенсивними конвективними рухами і локальним прискоренням часток. Саме ці процеси на границі і визначають трансформацію і надходження енергії і імпульсу у внутрішні області магнітосфери Землі. Інтенсивність зазначених процесів безпосередньо пов'язана з параметрами СВ і орієнтацією міжпланетного магнітного поля (ММП). Збільшення динамічного тиску в СВ і поява південної компоненти ММП, яка стимулює магнітне перез'єднання в лобовій частині магнітосфери, супроводжуються і різким збільшенням надходження енергії – імпульсу всередину магнітосфери. У зв'язку з цим вводиться поняття магнітної збуреності магнітосфери, яке кількісно характеризується різними загальновизнаними індексами, що побічно вказують на стан магнітосфери (Kp, AE та інші). Слід підкреслити, що відгук магнітосфери на зміну параметрів СВ і ММП є суттєво нелінійним. При певному підвищеному рівні активності динаміка магнітосфери кардинальним чином змінюється. Внутрішні дисипативні процеси вже не справляються з поглинанням додаткової енергії, що надходить в магнітосферу у вигляді енергійних часток і електромагнітних полів. Ця енергія накопичується, в основному, в хвості магнітосфери у вигляді потенційної енергії натягу магнітних силових ліній і, починаючи з деякого критичного рівня, трансформується в процесі магнітного перез'єднання в кінетичну енергію прискорених електронів та іонів. Цей процес носить вибуховий характер і відбувається за короткий час (початок вибухової фази порядку десятків секунд, загальна тривалість менше однієї години). Як правило, такі перевантаження магнітосфери виникають після сонячних спалахів, супроводжуваних інжекцією речовини і генерацією ударної хвилі в СВ. Важливу роль відіграє і поява південної компоненти ММП .

1.1. Процеси в області ударної хвилі

При взаємодії надзвукового потоку газу або рідини з непроникненою перешкодою повинна утворюватися ударна хвиля. Вона виникає через необхідність сильного відхилення потоку від первинного напряму. Фізично це відбувається через виникнення відбитої звукової хвилі від перешкоди, яка взаємодіє з потоком, що набігає. Так як безколізійний потік плазми сонячного вітру поводить себе як рідина через присутність магнітного поля і мікронестійкостей, а середня швидкість сонячного вітру в ~ 400 км/с поблизу орбіти Землі приблизно в 5 разів перевищує швидкість магнітозвукових хвиль, то магнітозвукове число Маха становить приблизно 5. Отже, перед магнітосферою повинна постійно існувати ударна хвиля, яка сповільнює і відхиляє потік сонячного вітру навколо магнітосфери .

Вперше існування ударної хвилі перед магнітосферою було одночасно виявлено Келлогом і Аксфордом, а перше визначення форми і положення магнітосфери було зроблено Нессом за даними супутника IMP–1 [1, 2]. З тих пір визначення середнього положення і форми ударної хвилі визначалося неодноразово, і цьому сприяла дуже велика база даних перетинань фронту ударної хвилі багатьма високоапогейними супутниками Землі. Завдяки тому, що густина енергії магнітного поля в сонячному вітрі зазвичай істотно менша, ніж енергія кінетичного руху, в першому наближенні взаємодію сонячного вітру з магнітосферою можна розглядати в гідродинамічному наближенні. Це зробило дуже популярною гідродинамічну модель Спрайтера [3,4]. Тепер, коли магнітогідродинамічні моделі досягли великого розвитку, у ряді випадків враховується внесок магнітного поля у визначення положення навколоземної ударної хвилі і в характеристики течії плазми в перехідній області (яку часто називають за аналогією з англійським терміном магнітошаром) між ударною хвилею і магнітосферою. Проте, модель Спрайтера користується популярністю до цих пір завдяки своїй простоті і задовільному описі положення ударної хвилі і характеристик магнітошару.

На рис. 1.1 показано відоме визначення середнього положення і форми ударної хвилі [5, 6].

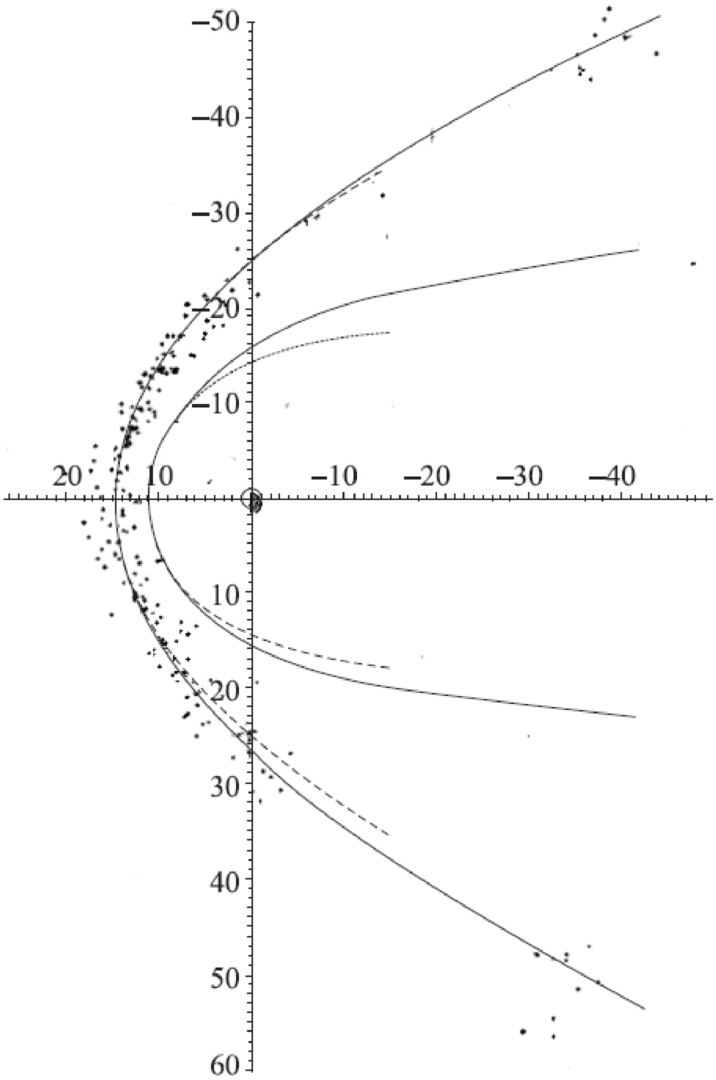


Рисунок 1.1 – Середнє положення і форма ударної хвилі, визначені Фейрфілдом (неперервна лінія) та Спрайтером (пунктирна лінія)

Слід зазначити, що ударна хвиля яка відійшла характеризується компланарністю. Струм, який тече по фронту ударної хвилі, призводить до зростання компоненти магнітного поля, паралельної фронту. При цьому вектори магнітного поля в незбуреному потоці і за фронтом ударної хвилі є компланарними. Теорема компланарності виражається через векторні різниці і добутки величин магнітних полів по обидві сторони від фронту:

$$n = \frac{\left(\vec{B}_2 - \vec{B}_1\right) \times \left(\vec{B}_2 \times \vec{B}_1\right)}{\left|\vec{B}_2 - \vec{B}_1\right| \left|\vec{B}_2 \times \vec{B}_1\right|},$$

де n – одиничний вектор нормалі до фронту. Теорема компланарності використовується для обчислення напрямків цієї нормалі за вимірюваннями магнітних полів.

Найбільш швидкою хвилею в замагніченій плазмі є магнітозвукова хвиля. Саме магнітозвукова хвиля, що відбивається від перешкоди, визначає положення і форму ударної хвилі перед перешкодою яка обтікається. Можливість утворення ударних хвиль у замагніченій плазмі криється в самій природі магнітозвукових хвиль. Нелінійна МГД- хвиля укручується, так як наступна хвиля поширюється в середовищі, в якій попередня хвиля змінює швидкість поширення хвиль. Так утворюються дисперсійні ударні хвилі.

Нелінійні хвилі укручуються до тих пір, поки дисипація, яка оцінюється з кінетичної теорії, достатня для утворення стаціонарної ударної хвилі. Ідеальна магнітогідродинаміка не описує процеси дисипації, але дозволяє описати зміну характеристик течії по обидва боки ударної хвилі (за межами шару, в якому йдуть дисипативні процеси) з використанням законів збереження. Такі умови на стрибку називаються співвідношеннями Ренкіна – Гюгоніо. На рис. 1.2. показані співвідношення стрибків магнітного поля, нормальних швидкостей плазми (у зворотному співвідношенні до густини) у системі координат ударної хвилі і значень відносно тиску плазми до тиску магнітного поля β_2 за ударною хвилею [7]. Ці величини для двох значень β_1 в незбуреному потоці наведені в залежності від кута між напрямом магнітного поля в незбуреному потоці і нормаллю до фронту ударної хвилі Θ_{Bn} і числом Маха для швидкої хвилі в незбуреному потоці M_{f1}.

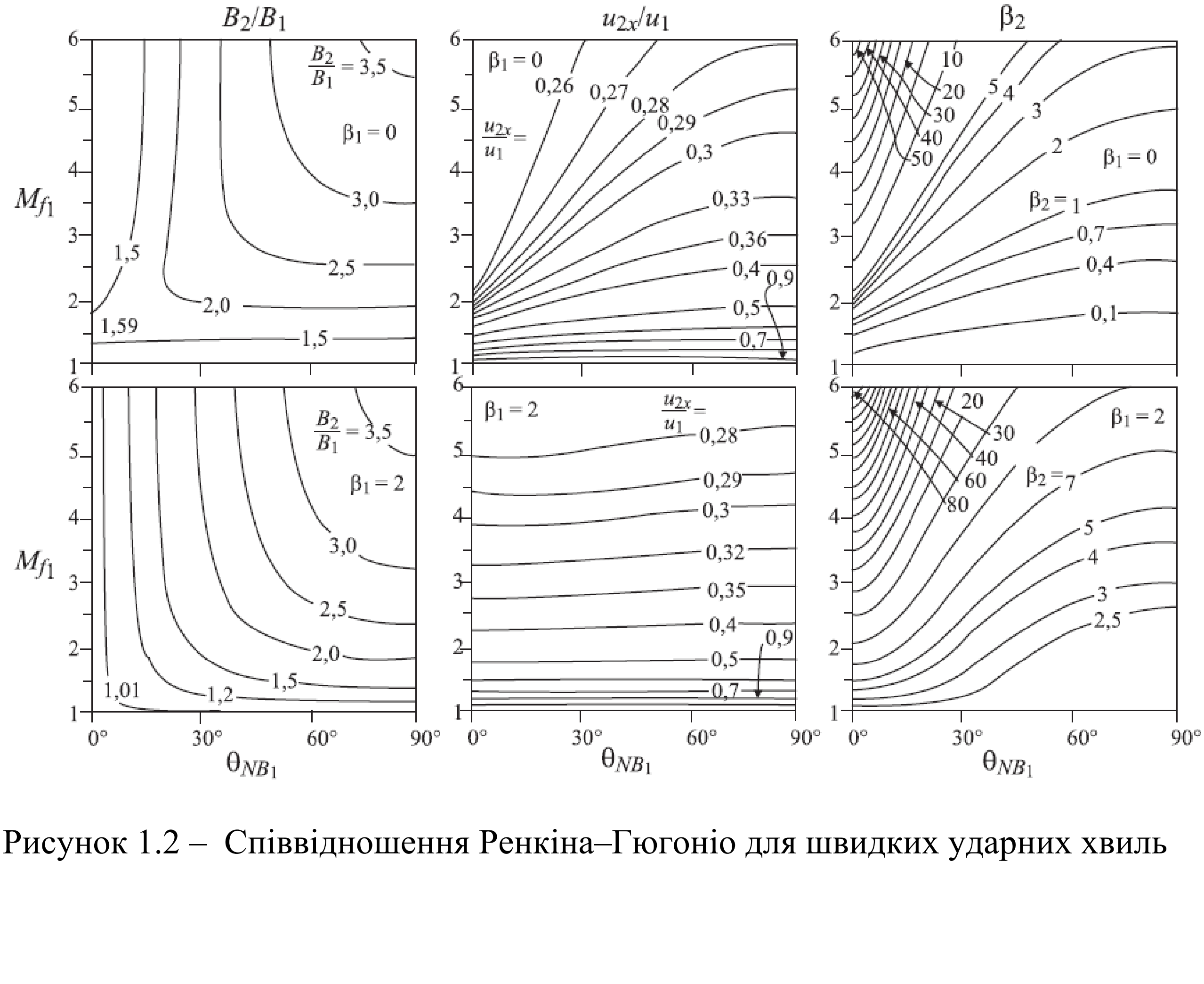


Рисунок 1.2 – Співвідношення Ренкіна–Гюгоніо для швидких ударних хвиль

Інший механізм, який обмежує укручення фронту ударної хвилі – це аномальний опір. Який з двох механізмів – дисперсія або аномальний опір, зупиняють укручення фронту – залежить від швидкості процесу, спрацьовує більш швидкий. У навколоземній ударній хвилі були знайдені обидва типи.

Теоретичні дослідження показали, що в замагніченій плазмі без зіткнень з малим значенням β ударні хвилі добре описуються в рамках магнітної гідродинаміки. Структура ударної хвилі – ламінарна, і товщина фронту визначається аномальним опором, який виникає у результаті іонно – звукової нестійкості. Поріг іонно – звукової нестійкості малий при відношенні електронної температури до іонної температурі $T_e/T_i > 1$ в незбуреному потоці.

Аномальний опір може забезпечити необхідну швидкість дисипації тільки для ударних хвиль з відносно невеликим числом Маха. При деякому значенні числа Маха, який називають першим критичним числом Маха $M^*_{f1} = V/V_{MS}$, іонно – звукова нестійкість не може зупинити укручення та перекидання фронту, так як вона не забезпечує необхідну швидкість дисипації. Профіль швидкості перекидається, і виникає багатокомпонентний потік, що забезпечує аномальну в'язкість і необхідну швидкість дисипації. Було запропоновано існування другого і третього критичних чисел Маха . При числі Маха більше першого критичного (у діапазоні між ~ 3 і ~ 5) всередині фронту ударної хвилі виникає так званий ізомагнітний стрибок – електростатичний іонно – звуковий стрибок, вперше виявлений в лабораторії. Він існує між першим і другим критичними числами Маха і потребує, щоб електронна температура перевищувала іонну температуру. Передбачається існування третього критичного числа Маха, вище якого відбивання іонів вже не може забезпечити необхідну дисипацію.

Аналітичні розв'язки, експеримент і чисельне моделювання показали, що частина іонів відбивається від фронту завдяки спільній дії стрибків магнітного й електричного полів на фронті сильної квазіперпендікулярної ударної хвилі. Перші спостереження подвійної структури потоку іонів всередині фронту ударної хвилі були проведені на супутнику «Vela-4». Детальний аналіз спостережень відбитих іонів для різної геометрії фронту показує, що відбивання іонів відбувається відповідно з припущенням про дзеркальне відбивання від фронту хвилі (рис. 1.3).

У квазіпараллельній ударній хвилі відбиті іони йдуть вгору по набігаючому потоці, утворюючи двухпучковий розподіл за швидкостями. При цьому виникає сильна магнітозвукова турбулентність, яка і призводить до дисипації енергії на фронті хвилі. Для квазіперпендикулярної ударної хвилі відбитий пучок обертається у вузькій області перед основним стрибком магнітного поля, перед тим як прискоритися і пройти через фронт. При цьому виникає електрон-іонна нестійкість і сильні коливання в області нижньогібридного резонансу, які можуть відігравати певну роль у дисипативних процесах на фронті.

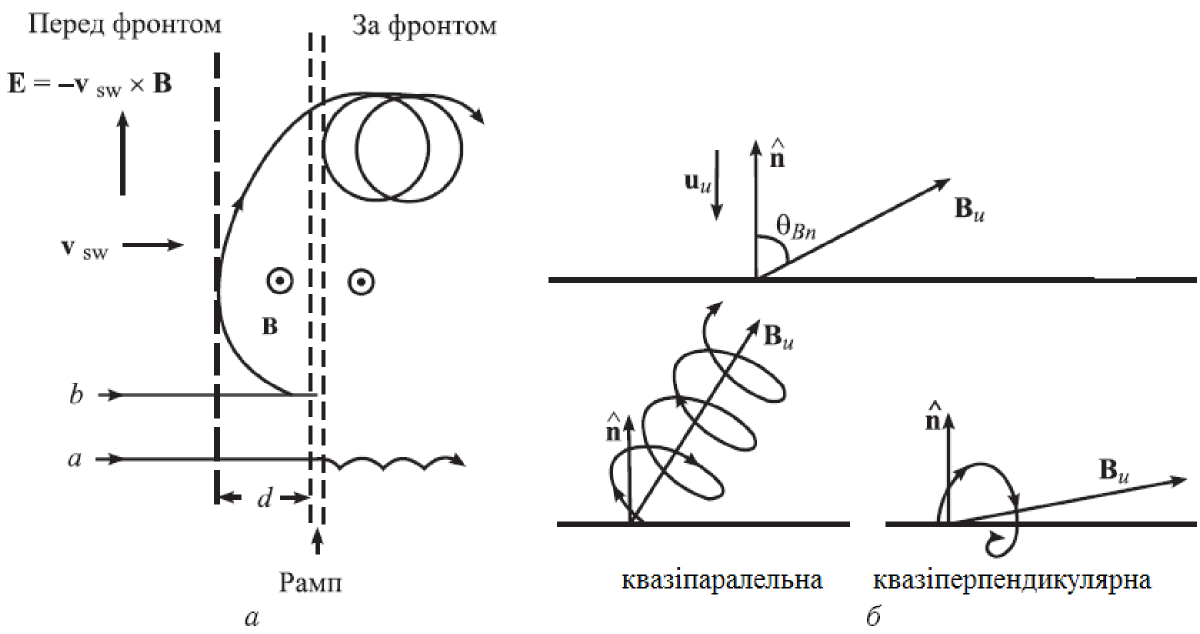


Рисунок 1.3 – Відбиття і прискорення частини іонів сонячного вітру від фронту перпендикулярної ударної хвилі (а): за фронтом ударної хвилі пучок прискорених іонів b змішується із пучком іонів який пройшов а. Різниця в русі відбитих іонів для фронту квазіпаралельних і квазіперпендикулярних ударних хвиль (б)

Перпендикулярні і квазіперпендикулярні ударні хвилі також поділяються за характером профілю магнітного поля на ламінарні, квазіламінарні, квазітурбулентні і турбулентні. Належність до тієї чи іншої категорії визначається значеннями магнітозвукових чисел Маха і параметром β в набігаючому потоці. У космічній плазмі ударний перехід в сильній ударній хвилі значно більш протяжний в просторі, ніж стрибок магнітного поля. Стрибок магнітного поля пов'язаний зі струмом електронів, стабілізованим аномальним опором іонно-звукових хвиль. Відбиті від фронту квазіперпендикулярної хвилі іони обертаються в області, в якій напруженість магнітного поля підвищена і розвивається сильна турбулентність в діапазоні нижньогібридних хвиль. Відбиті і прискорені іони, що пройшли потім через фронт хвилі , утворюють овершут і андершут магнітного поля, відповідно тому надлишку і дефіциту густини в двох областях за стрибком магнітного поля. Ці іони разом із тими іонами, що пройшли утворюють за стрибком магнітного поля бімодальний розподіл за швидкостями, який формально забезпечує необхідний нагрів, необхідний умовами Ренкіна – Гюгоньо. Однак, цей розподіл є нестійким, і релаксує до сталого розподілу на великому лінійному масштабі. Таким чином, перехід від одного стану плазми в незбуреному потоці до відрелаксованого розподілу за фронтом ударної хвилі відбувається в кілька етапів і відбувається на досить великому лінійному масштабі. Ще більший масштаб переходу пов'язаний з квазіпараллельною ударною хвилею, на якій відбитий пучок далеко поширюється вгору по потоку і викликає сильну турбулентність на великих відстанях від фронту хвилі. Додаткові відхилення від рівноважного стану викликаються різними хвилями в плазмі, які збуджуються як локально, так і поширюються від фронту.

1.2. Форшок

До початку космічних досліджень вважалося, що ударна хвиля, за визначенням, не може дати про себе знати в набігаючому потоці. Однак досить скоро виявилося, що це не так. Справа тут у впливі магнітного поля, яке дозволяє тікати вгору по потоку прискореним на ударній хвилі частинкам і швидким хвилям. Перед ударною хвилею було відкрито *форшок* – великомасштабна область, в якій існують різні типи прискорених частинок і хвиль, частина з яких збуджується при взаємодії зустрічних пучків іонів. Форма і структура форшоків визначається кутом між нормаллю до фронту і локальним напрямком магнітного поля в набігаючому потоці сонячного вітру Θ_{Bn}. У квазіперпендикулярному випадку ($\Theta_{Bn} > 45^{\circ}$) форшок обмежений підніжжям фронту – областю, де відбиті іони повертаються до фронту під дією сили Лоренца. Розмір підніжжя становить 0,68 Ri , де Ri ларморівский радіус іонів сонячного вітру. У квазіпараллельній ударній хвилі ($\Theta_{Bn} < 45^{\circ}$) форшок являє собою велику область вгору по потоку від фронту хвилі. Вимірювання на КА на початку 70-х рр. виявили існування компоненти іонів, що поширюються вгору по потоку від фронту ударної хвилі, а також посилення флуктуацій магнітного поля.

Було показано, що ці флуктуації являють собою квазімонохроматичні хвилі з періодом близько 30 с з переважно лівосторонньою поляризацією в системі відліку КА. Крім того, були виявлені також пакети лінійно поляризованих хвиль з укрученям фронту.

Флуктуації електричного поля в діапазоні електронної плазмової частоти були ототожнені з поздовжньою компонентою електронів, відбитою від фронту УХ. Спостереження на супутниках ISEE-1 і ISEE-2 дозволили отримати нові дані про структуру і процеси в форшоці і значно розширити уявлення про них.

Квазіпараллельна ударна хвиля схильна до сильного впливу форшоків, оскільки він вносить сильні збурення в потік сонячного вітру перед ударним фронтом. Низькочастотні хвилі можуть призводити до варіацій у діапазоні кутів Θ_{Bn}, що, у свою чергу, може впливати на процес термалізації на фронті УХ. Локалізовані короткочасні магнітні структури великої амплітуди часто спостерігаються в форшоковій області. Ці структури, як передбачається, є по суті справи частиною фронту квазіпаралельної ударної хвилі в процесі її еволюції.

На відміну від іонної компоненти, властивості відбитих від ударного фронту електронів більш стабільні. Електронний форшок утворюється безпосередньо відразу за тангенціальною лінією до фронту ударної хвилі. Поблизу його зовнішнього кордону спостерігаються більш енергійні електрони з енергією > 1 кеВ і в міру віддалення від кордону всередину форшоку енергія електронів зменшується. Відбита електронна компонента спостерігається як високоенергійний хвіст у розподілі електронів сонячного вітру. Такий розподіл призводить до генерації ленгмюрівських хвиль на електронній плазмовій частоті на передній границі електронного форшоку, де пучок відбитих електронів більш енергійний. У міру просування в глиб форшоку спостерігається зсув відносно електронної плазмової частоти [8].

1.3. Магнітошар, як перехідна область магнітосфери Землі

Магнітошар є сполучною ланкою між міжпланетним середовищем і магнітосферою, за допомогою якого передаються всі збурення і зміни сонячного вітру і міжпланетного магнітного поля. Ці дії певним чином модифікуються в магнітошарі, що, безумовно, необхідно враховувати. З іншого боку, динаміка магнітошару може надавати і власний вплив на процеси в магнітосфері, що також є досить важливим. Зокрема, було встановлено, що швидкі локальні зміни тиску плазми в магнітошарі є джерелом швидких рухів магнітопаузи.

На навколоземній ударній хвилі відбувається стиснення, гальмування, нагрівання і повертання течії плазми сонячного вітру. Найбільш наочно результат цих процесів можна продемонструвати на основі відомої газодинамической моделі Спрайтера [3,4]. У цій моделі на основі ряду спрощень (нехтування дією магнітних сил, задавання форми перешкоди (магнітосфери) і положення магнітопаузи) була чисельно розрахована при певних параметрах сонячного вітру наближена картина потоків плазми в магнітошарі.

На рис. 1.4, а показано напрямок ліній потоку плазми в припущенні циліндричної симетрії обтікання відносно лінії Сонце – Земля. Тут і далі наведені результати розрахунків в припущенні магніто-звукового числа Маха в сонячному вітрі $M = 8$ і показника політропи $\gamma = 5/3$. Видно, що потік плазми, пройшовши через ударну хвилю, відхиляється від лінії Сонце–Земля тим більше, чим ближче до підсонячної точки він входить до магнітошару. При подальшому русі форма ліній потоку в певній мірі повторює форму магнітопаузи. На рис. 1.4, б представлені контури рівної густини плазми магнітошару (ρ) у відповідності до густини набігаючого сонячного вітру (ρ_∞) . Як видно з графіка, це відношення відразу за ударною хвилею близьке до відомого співвідношення Ренкіна – Гюгоньо (див. вище) $(\gamma + 1)/(\gamma - 1)$, яке в даному випадку приблизно дорівнює 4. У більш загальному вигляді згідно моделі Спрайтера стрибок густини плазми на ударній хвилі має дорівнювати $[(\gamma - 1) M_2 + 2]/(\gamma + 1) M_2$. У підсонячній області відносна густина плазми найвища, а потім вона поступово спадає з віддаленням до флангу магнітосфери, але у всій денній півсфері плазма залишається стисненою із густиною вищою густини набігаючого сонячного вітру. При цьому густина плазми поблизу ударної хвилі помітно вища, ніж поблизу магнітопаузи.

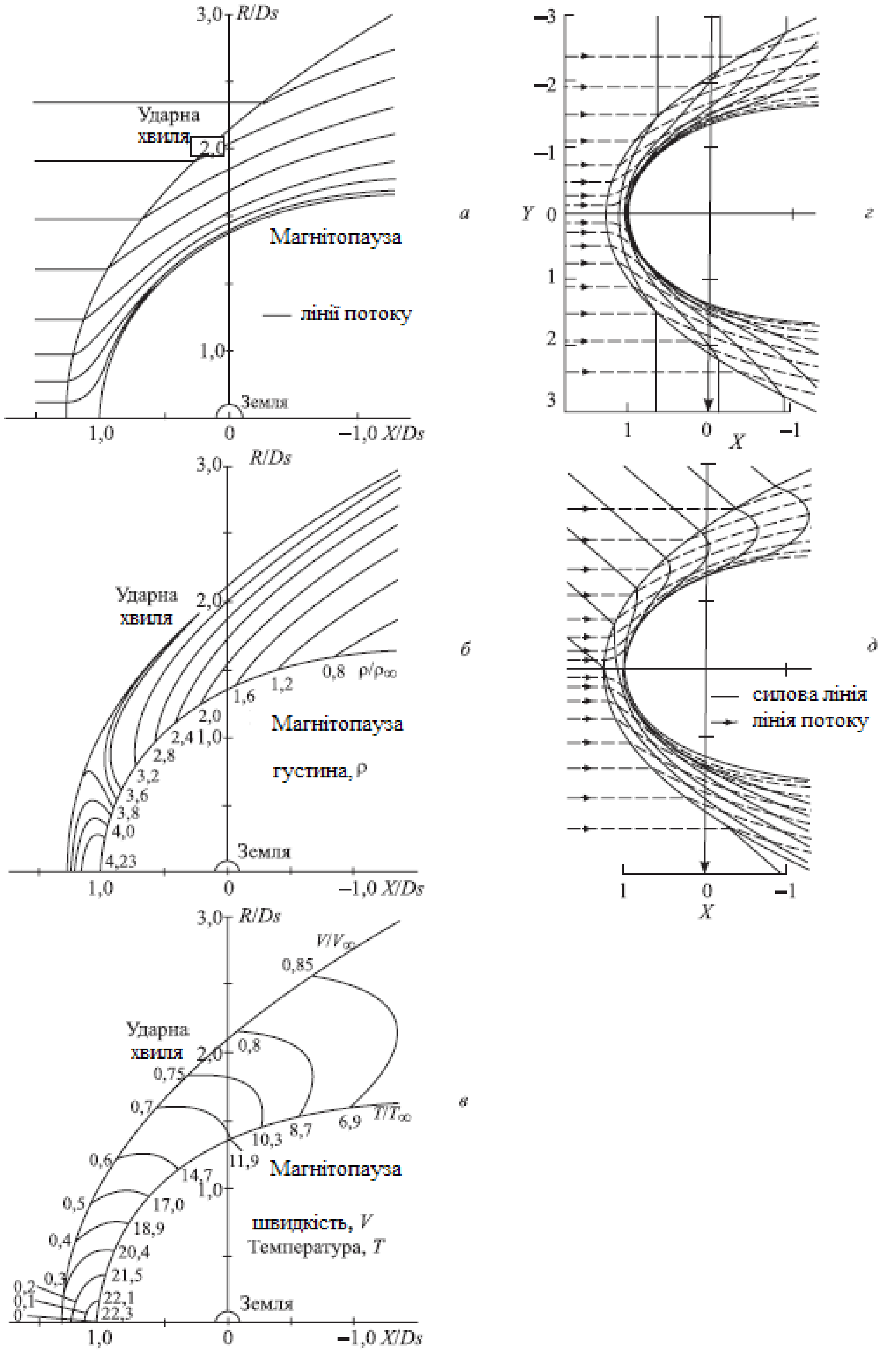


Рисунок 1.4 – Поведінка параметрів плазми в магнітошарі – розрахунок за моделлю Спрайтера для М = 8, $\gamma = 5/3$: а – лінії струму плазми; б – контури рівної густини; в – контури рівної швидкості і температури; г – силові лінії магнітного поля, перпендикулярного лінії Сонце–Земля; д – силові лінії магнітного поля, нахиленого до лінії Сонце–Земля під кутом 45◦

На рис. 1.4, в дано контури рівних швидкостей потоку (V) і температур (T) плазми, також віднесених до їх значень в сонячному вітрі. Видно, що швидкість течії дуже сильно (в 5–10 разів) спадає в підсонячній області (теоретично – до нуля), а потім поступово зростає з віддаленням до флангу магнітосфери, але скрізь в магнітошарі вона залишається меншою, ніж швидкість сонячного вітру. Контури постійної температури плазми в моделі Спрайтера збігаються з контурами швидкості, тому що відношення температур однозначно пов'язане з відношенням швидкостей:

$$\frac{T}{T_\infty} = 1 + \frac{(\gamma - 1)M_2}{2(1 - V^2 / V_\infty^2)},$$

де V – швидкість течії, а знаком ∞ відзначені значення тих же параметрів в сонячному вітрі. Відзначимо, що зростання температури плазми в магнітошарі вельми значне – так у всій денній півсфері ця температура повинна перевищувати температуру сонячного вітру в 10 – 20 разів.

Слід відмітити, що в однорідинній моделі Спрайтера газодинамічна температура є сумою іонної і електронної температур. При цьому, в сонячному вітрі електронна температура зазвичай вдвічі більше іонної, однак при переході через ударну хвилю вона змінюється порівняно мало. Це означає, що зміна іонної температури повинна бути ще вища, ніж показано на рис. 1.4, в. На противагу сонячному вітру в магнітошарі іонна температура, в середньому, помітно перевищує електронну. Хоча в першій моделі Спрайтера магнітні сили не враховувалися, у подальшій роботі [9] була зроблена спроба представити картину поведінки магнітного поля в магнітошарі, розглядаючи перенесення силових ліній магнітного поля газодинамічним потоком плазми. На рис. 1.4, г, д представлені приклади відповідного розрахунку для двох випадків: для направлення міжпланетного магнітного поля (ММП) перпендикулярно потоку сонячного вітру (г) і під кутом 45° до цього потоку (д).

Добре видно стиснення і вигинання силових ліній магнітного поля в магнітошарі навколо магнітопаузи – цей ефект називається «драпіруванням».

Слід зазначити, що модель Спрайтера досить непогано узгоджується з супутниковими вимірами.

Зіставлення розподілу поперек магнітошару середніх значень виміряних і розрахованих відносних параметрів потоку іонів [10] показали, що модель Спрайтера в середньому спрацьовує, проте дає завищені оцінки потоку іонів поблизу ударної хвилі. Однією з причин цього, але, мабуть, не єдиною, може бути відбивання частини іонів сонячного вітру (до 10%) від ударної хвилі, що в гідродинамічних моделях ніяк не враховується.

2 АНАЛІЗ РОЗВИНЕНОЇ ТУРБУЛЕНТНОСТІ

Починаючи розгляд властивостей дрібномасштабної турбулентності, зробимо кілька важливих зауважень: розглядається розвинена турбулентність, яка характеризується наповненими спектрами Фур'є (як часовими, так і просторовими), що свідчить про існування багатомасштабної структури поля швидкості. Саме багатомасштабність і є найважливішою ознакою розвиненої турбулентності, приводячи до виникнення гігантського числа ступенів свободи.

При цьому будь-який підхід до опису розвиненої турбулентності по суті являє собою той чи інший спосіб обмеження числа ступенів свободи, що призводить до відповідних моделей. У підході Рейнольдса [11 – 13], використовується представлення величин у вигляді сум середніх полів і пульсацій.

$$
\begin{aligned}
v_i(\vec{r},t) &= U_i(\vec{r},t) + u_i(\vec{r},t),\\
p(\vec{r},t) &= P(\vec{r},t) + p'(\vec{r},t),\\
f(\vec{r},t) &= F(\vec{r},t) + f'(\vec{r},t).
\end{aligned}
$$

У результаті якого з рівнянь Нав'є - Стокса отримуємо рівняння для середніх величин у вигляді

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\rho^{-1}\frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j}\left\langle u_j u_i \right\rangle + F_i,\\
&\frac{\partial U_k}{\partial x_k} = 0,
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

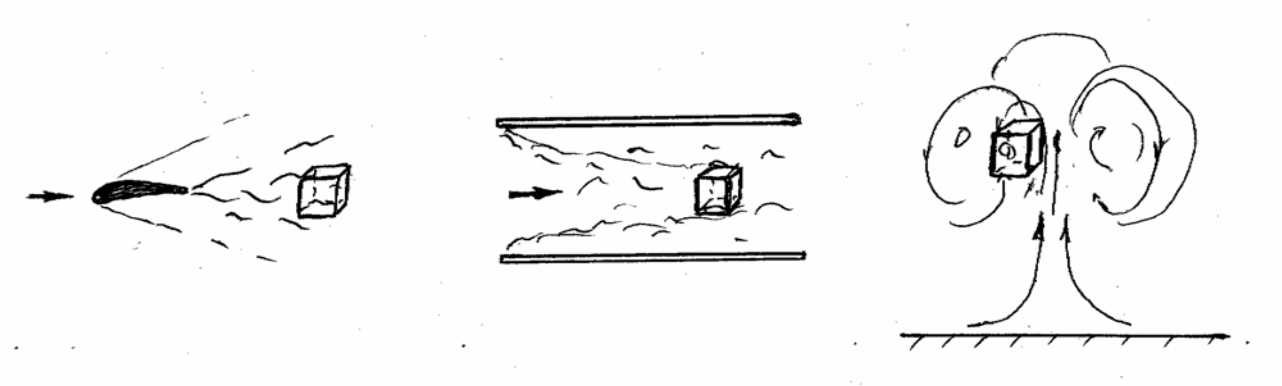
Які включають новий член – тензор напружень Рейнольдса (кутові дужки позначають усереднення по ансамблю реалізацій). Різні способи замикання рівнянь (2.1) складають суть напівемпіричних моделей.

Підхід Рейнольдса (і пов'язані з ним напівемпіричні моделі) спрямований на опис середніх полів швидкості, що виникають у конкретних потоках. Кожна напівемпірична модель адаптується для заданого (як правило, досить вузького) класу течій і включає ряд параметрів, експериментально визначених саме для даного класу течій і справедливих в певному діапазоні значень числа Рейнольдса.

Таким чином, робиться спроба обмежитися описом великомасштабних полів, а вплив дрібномасштабних полів охарактеризувати за допомогою невеликого числа параметрів.

Важливим є питання про те, чи є у турбулентності деякі універсальні властивості, які не залежать від конкретних умов її збудження? Очевидно, що розраховувати на виявлення таких універсальних властивостей можна лише далеко від кордонів і на масштабах, істотно менших розмірів області, зайнятих турбулентним потоком. Таким чином, особливий інтерес представляє вивчення дрібномасштабної турбулентності – масштаби $l << L$ (L – зовнішній, або інтегральний масштаб турбулентності). Слід зазначити, що при розгляді розвиненої турбулентності, передбачається, що числа Рейнольдса настільки великі, що залишається широкий діапазон збурених масштабів, що задовольняють цій умові. Інакше кажучи, $\lambda<<l<< L$, де λ – мікромасштаб турбулентності, що характеризує масштаби пульсацій швидкості, на яких стає істотною в'язка дисипація [14, 15].

На рис.2.1 схематично показані три різних турбулентних потоки (турбулентний слід, течія в трубі і конвективний факел) і області в них, зображені у вигляді кубів, в яких можна сподіватися на виявлення таких універсальних властивостей. При наявності усередненого потоку (потік в трубі) виділений куб рухається з середньою швидкістю цього потоку.



а б в

Рисунок 2.1. – Різні типи турбулентних потоків: а – турбулентний слід, б – течія в трубі, в – конвективний факел

Виділені області не випадково мають кубічну форму. Справа в тому, що, бажаючи уникнути впливу кордонів, ми в той же час хочемо розглядати обмежену область потоку, причому властивості течії в цій галузі не повинні залежати від її точного положення (іншими словами, використовується гіпотеза про однорідність турбулентності на масштабах, багато менших масштабу її порушення L). Найбільш простий шлях задоволення цих суперечливих вимог полягає у розгляді кубічної області з ребром D, на гранях якого виконуються періодичні граничні умови. Ця умова полягає в тому, що для всякої функції і будь–яких цілих n , m , q

$$f(x + nD, y + mD, z + qD) = f(x, y, z).$$

Така постановка завдання дуже зручна для прямих чисельних розв’язків рівнянь Навье-Стокса. Саме для куба з періодичними граничними умовами (для квадрата в разі двовимірних течій) виконані практично всі чисельні експерименти з дослідження властивостей однорідної турбулентності. Кубічна геометрія і умова періодичності створюють ідеальні умови для застосування спектральних (і спектрально-сіткових) методів, так як будь-яка функція $f(t,\vec{r})$ може бути представлена у вигляді

$$f(t,\vec{r})=\sum_{n,m,q}\widehat{f}_{nmq}(t)e^{\frac{2\pi i}{D}(nx+my+qz)}=\sum_{\vec{k}}\widehat{f}_k(t)e^{i\vec{k}\vec{r}},$$

де $\vec{k}=\dfrac{2\pi}{D}\left(n\vec{e}_x+m\vec{e}_y+q\vec{e}_z\right)$ – хвильовий вектор, а коефіцієнти Фур'є визначаються формулою

$$\widehat{f}_k(t)=\frac{1}{D^3}\iiint\limits_{0-D}f(t,\vec{r})e^{-\vec{k}\vec{r}}d\vec{r}.$$

Слід відмітити, що фур'є-представлення зручно тим, що кожна гармоніка відповідає руху певного просторового масштабу. Для того, щоб отримати енергію всіх рухів заданого масштабу $l=2\pi/k$, потрібно підсумувати всі гармоніки, хвильові вектори яких рівні за модулем

$$E(k)=\sum_k\left|\widehat{\vec{v}}_k\right|^2.$$

2.1 Аналіз розмірності в класичній теорії Колмогорова 1941 (К41)

А.Н. Колмогоров у своїй класичній роботі, що поклала початок систематичного вивчення дрібномасштабної турбулентності, сформулював дві гіпотези, що стосуються статистичних властивостей однорідної і ізотропного турбулентності при великих числах Рейнольдса [16, 17].

1 – я гіпотеза Колмогорова. Статистичні властивості в інерційному і дисипативному інтервалі (тобто на масштабах $l << L$) не залежать від способу порушення турбулентності і універсальним чином визначаються трьома параметрами: швидкістю дисипації енергії ε, кінематичною в'язкістю ν і самим масштабом l.

2 – я гіпотеза Колмогорова. Статистичні властивості турбулентності в інерційному інтервалі універсальні і залежать тільки від швидкості дисипації енергії ε і масштабу l.

Ці гіпотези містять відповідь на питання, які величини можуть впливати на динаміку інерційного інтервалу. Говорячи про статистичні властивості, в першу чергу мають на увазі розподіл енергії між рухами різного масштабу, хоча, звичайно ж поле швидкості – це поле випадкової величини і щоб описати його, потрібно знати функцію розподілу ймовірності, або, що те ж саме, сукупність всіх статистичних моментів цієї величини.

В якості характеристики пульсацій швидкості на масштабі l різниця проекцій швидкості в цих точках задається співвідношенням

$$\delta v_l = v_l(\vec{r}+\vec{l}\,) - v_l(\vec{r}\,).$$

Статистичні моменти цієї величини (структурні функції)

$$S_q(l) = \left\langle \delta v_l^q \right\rangle \tag{2.2}$$

в силу ізотропії течії не повинні залежати від напрямку відрізка *l*.

2.2 Логнормальна модель (К62)

Експериментальні дослідження статистичних властивостей дрібномасштабної турбулентності ведуться, починаючи з п'ятдесятих років. На перших порах основний інтерес представляло експериментальне підтвердження закону «п'яти третіх» і визначення константи. У численних експериментах було підтверджено існування інерційного інтервалу з розподілом енергії пульсацій швидкості, близьким до закону «5/3». Вимірювання константи дали її значення, але інтерес до точного виміру цієї величини впав після того, як стало зрозуміло, що закон Колмогорова описує реальну ситуацію тільки приблизно [17, 18].

Найбільш точні вимірювання енергетичного спектру однорідної турбулентності показують, що він підпорядковується степеневому закону у вигляді

$$E(k) \sim k^{-a}$$

з показником ступеня $a = 1{,}71 \pm 0{,}02.$ Відмінність від п'яти третіх, на перший погляд, не велика, але вона принципова. Більш повну картину можна отримати, досліджуючи поведінку структурних функцій високих порядків. На практиці вимірюють значення швидкості в двох точках, обчислюють структурні функції (2.2) і, очікуючи існування степеневих законів виду

$$S_q(l) \sim l^{\zeta_q},$$

будують структурні функції в подвійному логарифмічному масштабі. При цьому в інерційному інтервалі виникають лінійні ділянки, нахил яких дає величину степеневих показників ζ_q. Вже перші виміри структурних функцій відносно невисоких порядків підтвердили справедливість зауваження Ландау – локальні варіації швидкості дисипації енергії порушують колмогорівський сценарій однорідної турбулентності.

Порушення локальної однорідності турбулентності отримало назву «переміжності». Суть цього явища полягає в тому, що в турбулентності навіть при як завгодно великих числах Рейнольдса активні області співіснують з пасивними, в яких потік квазіламінарний. Першу спробу скорегувати закон

К41 шляхом врахування статистичних властивостей поля дисипації енергії зробив сам Колмогоров в 1962 році (К62).

Для обліку структури поля дисипації енергії Колмогоров ввів в розгляд величину ε_l, яка являє собою середню швидкість дисипації, виміряну всередині об'єму з характерним розміром l (наприклад, сфери або куба). Модель тримається на двох додаткових гіпотезах.

Перша гіпотеза – це гіпотеза подібності

$$S_q(l) = \left\langle \delta v_l^q \right\rangle \sim \left\langle \varepsilon_l^{q/3} \right\rangle l^{q/3},$$

При цьому ми маємо статистичний момент порядку *q/3*.

$$\left\langle \varepsilon_l^q \right\rangle \sim l^{\tau_q}, \Rightarrow \zeta_q = \frac{q}{3} + \tau_{q/3}.$$

Друга гіпотеза К62 стосується виду функції розподілу ймовірності для величини ε_l. Звичайно як найпростіша ймовірнісна модель розглядається нормальний розподіл, проте, в нашому випадку так не годиться, оскільки дисипація – величина суто позитивна, а хвіст нормального розподілу може йти в область негативних значень.

Колмогоров запропонував уникнути цих труднощі шляхом розгляду логнормального розподілу (за нормальним законом розподілений логарифм дисипації енергії)

$$P(\varepsilon_l) = c e^{-\frac{(\ln \varepsilon - a)^2}{2\sigma_l^2}}.$$

Де P – функція розподілу ймовірності, $a = \ln \overline{\varepsilon}$, σ_l^2 – дисперсія, рівна на масштабі l величині

$$\sigma_l^2 = A + \mu \ln(L / l).$$

Логнормальна модель призводить до наступних виразів для показників степені:

$$\tau_q = \frac{\mu}{2} q(1-q),\ \zeta_q = \frac{q}{3} + \frac{\mu}{18} q(3-q).$$

Величина μ, називається коефіцієнтом переміжності, має простий фізичний зміст – з точністю до знака це показник степеня для моменту другого порядку поля дисипації енергії (($\tau_2 = -\mu$), тобто

$$\left\langle \varepsilon_l^2 \right\rangle \sim l^{-\mu}.$$

Зв'язаний з другим моментом поля дисипації шостий момент поля швидкості також дозволяє просто визначити коефіцієнт переміжності –

$$\zeta_6 = 2 - \mu,$$

тобто коефіцієнт переміжності дорівнює відхиленню показника степені ζ_6 від значення, яке слідує із моделі однорідної турбулентності К41 .

Гіпотеза про логнормальний розподіл була спростована й експериментально, і теоретично. Експериментальні вимірювання функції розподілу ймовірності показують, що в координатах $(\ln\varepsilon,\ \ln P)$ функція розподілу має несиметричний вигляд, в той час як логнормальний розподіл в таких координатах повинен призводити до параболи.

Щодо властивостей функції $\zeta(q)$ було доведено два твердження [17]. По–перше, $\zeta(q)$ – функція опукла і $\zeta_{q+1} \ge \zeta_q$ для будь-яких q.

На відміну від другої гіпотези, гіпотеза подібності використовується до теперішнього часу, хоча її інтерпретація зазнала суттєвих змін. Справа в тому, що ця гіпотеза несе в собі два протиріччя. По-перше, ліва частина виразу містить величину, що відноситься до інерційного інтервалу, а права – величину, ефективну тільки в дисипативній області. По-друге, дисипація енергії є величина суто позитивна, а пульсації швидкості – ні. У такому випадку важко розраховувати, що статистичні властивості цих величин однакові, а саме в цьому і полягає суть гіпотези подібності.

2.3 Фрактальний розгляд

В колмогорівській моделі однорідної турбулентності (К41) спостерігається рівномірне заповнення простору вихорами кожного масштабу. Таку структуру турбулентності ілюструє рис. 2.2а, на якому схематично зображено каскад енергії від вихорів більшого масштабу до вихрів меншого масштабу і для простоти представлена ситуація, коли кожен вихор даного масштабу має під собою два вихору меншого. При цьому вихори кожного масштабу займають весь простір (на малюнку воно одновимірне). Інша картина відповідає турбулентності з переміжністю (рис.2.2б).

Рисунок 2.2. – Схема каскаду енергії від вихорів: а – однорідний турбулентний потік, б – турбулентність з переміжністю

У рамках аналогічної схеми в цьому випадку частина вихорів не отримує енергію від вихорів верхнього рівня. На наступному рівні енергія вихорів, що залишилися (активних) вихорів знову передається тільки частині вихорів і так далі. У результаті в просторі утворюється багатомасштабна система активних і пасивних областей, яка з побудови являє собою фрактальну множину [19, 20]. Ідея використання фракталів для опису структури поля дисипації енергії вперше була висловлена в роботі Новікова та Стьюарта в 1964р [21]. Найпростіша динамічна модель інерційного інтервалу, що призводить до фракталів, запропонована в роботі [17].

Фрактали принесли в теорію турбулентності ще одну важливу ідею – ідею про неоднозначність масштабних показників, інакше кажучи, ідею про співіснування в розвинених турбулентних полях підмножин з різними законами масштабного подібності (скейлінга).

Важливо, що рівняння Нав'є - Стокса підкоряються шести принципам інваріантності, тобто, допускають шість видів перетворень, при яких будь-яке рішення рівнянь $\vec{v}(\vec{r},t)$ залишається розв'язком цих рівнянь:

1) просторовий зсув,
2) зсув у часі,
3) перетворення Галілея,
4) парність,
5) обертання,
6) масштабна інваріантність (скейлинг).

Остання властивість означає, що рівняння Нав'є - Стокса інваріантні до перетворення

$$t,\vec{r},\vec{v} \to \lambda^{1+a}t, \lambda\vec{r}, \lambda^{-a}\vec{v}.$$

Дійсно, таке перетворення призводить до появи в рівнянні руху наступних множників

$$\lambda^{-2a-1}\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \lambda^{-2a-1}\left[(\vec{v}\vec{\nabla})\vec{v} + \rho^{-1}\nabla P\right] = \nu\lambda^{-a-2}\Delta\vec{v}.$$

При кінцевій в'язкості інваріантність (подібність) забезпечується єдино можливим рішенням $a=1$, еквівалентним вимозі стійкості числа Рейнольдса (у скільки разів збільшується масштаб, в стільки ж разів повинна бути зменшена швидкість). Однак, при $\nu \to 0$ масштабна подібність забезпечується будь-яким значенням a. К41 дає рішення $a=1/3$, монофрактальная модель типу β – моделі призводить до іншого, але також єдиного, рішення. Біфрактальная модель (див. п.2.5) передбачає співіснування в потоці двох підмножин з різними законами подібності (різними a), а мультифрактальна модель (див п. 2.6) розглядає безперервну послідовність таких підмножин, приводячи до поняття мультифрактального спектру.

2.4 β – модель

В β – моделі в кубічній області послідовність масштабів задається співвідношенням

$$l_n = l_0 2^{-n}.$$

На кожному масштабі *n* вихідна область розбивається на кубики з ребром l_{n}, загальна кількість яких є $N = (l_0 / l_n)^3 = 2^{3n}$.

При переході до кожного наступного масштабу активною залишається тільки задана частина кубиків *b*, причому ця частина є величина постійна, що є параметром моделі. На масштабі *n* число активних вихорів є $M = N\beta_n$, де

$$\beta_n = \beta^n = \left(\frac{l_0}{l_n}\right)^{D-3} = 2^{n(D-3)},$$

а D є фрактальна розмірність активної області. Величина $d = 3 - D$, рівна різниці розмірності простору і розмірності фрактальної множини, називається корозмірністю і пов'язана з параметром β:

$$d = \frac{\ln 2}{\ln \beta}.$$

Важливим є визначення каскаду енергії в такій моделі. Характерне значення пульсацій швидкості на масштабі l_n позначимо як δv_n. Тоді характерний час (час обороту вихору відповідного масштабу) є $t_n \sim l_n / \delta v_n$. При суцільному заповненні простору (випадок однорідної турбулентності) густина енергії пульсацій масштабу *n*

$$E_n \sim \delta v_n^2,$$

а швидкість перенесення енергії через даний масштаб є

$$\varepsilon_n \sim \frac{E_n}{t_n} \sim \frac{\delta v_n^3}{l_n}.$$

Тоді з гіпотези сталості потоку енергії в будь-якому масштабі, що відноситься до інерційного інтервалу, $\varepsilon_n = \overline{\varepsilon} = const$ отримуємо колмогорівську залежність

$$\delta v_n \sim \left(l_n \overline{\varepsilon}\right)^{1/3}. \qquad (2.3)$$

У β – моделі енергія даного масштабу зосереджена тільки в активній частині потоку і середня щільність енергії на цьому масштабі дорівнює

$$E_n \sim \delta v_n^2 \beta_n.$$

Гіпотеза про те, що потік енергії як і раніше постійний, але, по мірі руху до малих масштабів, він зосереджується все в меншій частині простору. Отже,

$$\varepsilon_n \sim \frac{E_n}{t_n} \sim \frac{\beta^n \delta v_n^3}{l_n} = \bar{\varepsilon},$$

а замість (2.3) виходить наступна оцінка для пульсацій швидкості:

$$\delta v_n \sim (l_n \bar{\varepsilon})^{1/3} \beta^{-n/3} \sim \varepsilon^{-1/3} l_n^{(D-2)/3}. \tag{2.4}$$

Очевидно, що фрактальна розмірність D не може бути менше двох, так як в цьому випадку інтенсивність пульсацій швидкості наростатиме із зменшенням масштабів.

Отримаємо тепер оцінку для структурних функцій довільного порядку. Маємо

$$S_q(l_n) = \left\langle \delta v_l^q \right\rangle \sim \beta_n \delta v_n^q \sim \bar{\varepsilon}^{q/3} l_n^{q/3} \beta^{n(1-q/3)} \sim \bar{\varepsilon}^{q/3} l_n^{q/3+(3-D)(3-q)/3}$$

або

$$\zeta_q = \frac{q}{3} + \frac{(3-D)(3-q)}{3}.$$

На відміну від логнормальної моделі, яка дає квадратичну поправку до колмогоровського закону $q/3$ для масштабних показників, β – модель дала лінійну поправку, яка задовольняє умові $\zeta_3 = 1$, але порушує вимогу $\zeta_0 = 0$ [22,23].

2.5 Біфрактальна модель

В основі β – моделі лежить уявлення про турбулентне поле скоростей, як про однорідний фрактал, який характеризується єдиним параметром. Серед спроб удосконалення β – моделі можна виділити дві. Перша – це так звана випадкова β – модель. Якщо в стандартній β – моделі області поділяються на активні і пасивні, то є ймовірність того, що турбулентність в даній точці існує, дорівнює або нулю, або одиниці, то в випадкову β – модель вводяться два додаткові параметри p_1 і p_2, що визначають вірогідність існування турбулентності при черговому дробленні на більш активну і менш активну частини [24].

Зупинимося детальніше на другій модифікації β – моделі, що отримала назву біфрактальної моделі. Ідея цієї моделі полягає в тому, що передбачається співіснування двох фрактальних підмножин з різними законами скейлінга виду (2.4) і відповідними розмірностями D_1 і D_2. Для пульсацій швидкості на масштабі n отримуємо оцінку

$$\delta v_n \sim \mu_1 l_n^{a_1} P_1 + \mu_2 l_n^{a_2} P_2,$$

де μ_i – деякі числові множники, а ймовірності появи елементів підмножин визначаються точно так само як і для β – моделі. В результаті, для пульсацій швидкості отримаємо

$$\delta v_n \sim \mu_1 (l_n / l_0)^{a_1+3-D_1} + \mu_2 (l_n / l_0)^{a_2+3-D_2},$$

а для структурних функцій довільного порядку

$$Sq(l_n) = \left\langle \delta v_n^q \right\rangle \sim \mu_1 l_n^{qa_1} P_1 + \mu_2 l_n^{qa_2} P_2 \sim \mu_1 (l_n / l_0)^{qa_1+3-D_1} + \mu_2 (l_n / l_0)^{qa_2+3-D_2}.$$

Нас цікавить вид масштабних множників в степеневих законах $S_q(l) \sim l^{\zeta_q}$. Оскільки (l_n / l_0) є величина мала, то визначальний внесок дає доданок з найменшим показником ступеня. З цього випливає , що

$$\zeta_q = \min(qa_1 + 3 - D_1, qa_2 + 3 - D_2).$$

2.6 Мультифрактальна модель

Природним узагальненням описаної вище біфрактальної моделі є мультифрактальна модель, яка заснована на припущенні, що в турбулентності існує безперервна послідовність підмножин, кожна з яких характеризується своїм показником a. Значення a лежать в інтервалі $a_{\min} < a < a_{\max}$.

Структурні функції отримують внесок від всіх підмножин і визначаються інтегралами

$$Sq = \left\langle \delta v_n^q \right\rangle \sim \int_{a_{\min}}^{a_{\max}} \left(\frac{l}{l_0} \right)^{qa} P(\alpha) d\alpha,$$

в яких розподіл ймовірності записується у вигляді $P(\alpha) \sim \left(\frac{l}{l_0} \right)^{-f(\alpha)}$.

Тоді

$$S_q \sim \int_{a_{\min}}^{a_{\max}} \left(\frac{l}{l_0} \right)^{qa - f(\alpha)} d\alpha.$$

Оскільки $l/l_0 \ll 1$, то найбільший внесок в інтеграл дає складова з мінімальним показником степеня. отже,

$$\zeta_q = \min(q\alpha - f(\alpha)). \tag{2.5}$$

Умова мінімуму дає

$$q = f'(\alpha). \tag{2.6}$$

У такій моделі a є локальна характеристика скейлінгових властивостей, а функція $f(\alpha)$, називається мультифрактальним спектром, описує глобальну природу розподілу областей з різним скейлінгом. Очевидно, що мультифрактальна модель має по суті нескінченне число параметрів і може описати будь-яку експериментально виявлену залежність ζ_q.

Розглянемо алгоритм обчислення мультифрактального спектру. Нехай є позитивно визначена величина x (це може бути густина енергії, завихреність, швидкості дисипації і т.д.) [19]. Досліджувану область розіб'ємо на кубики з ребром l (всього N кубиків) і введемо величини

$$\rho_i = \frac{\xi_i}{\sum_{i=1}^{N} \xi_i},$$

де ξ_i є середнє по кубику i значення розглянутої величини. Визначимо структурні функції

$$S_q = \sum_i \rho_i^q,$$

Узагальнена розмірність задається співвідношенням

$$D_q = \lim_{l \to 0} \frac{\ln \sum_i \rho_i^q}{(q-1)\ln l}.$$

Виходячи з мультифрактальної структури розглянутого поля, і вважаючи, що в різних точках простору досліджувана величина підпорядковується масштабному закону типу $\rho(l) \sim l^a$ з різними значеннями показника a, структурні функції можна записати у вигляді

$$S_q \propto \int_{a_{\min}}^{a_{\max}} l^{qa-f(a)}da.$$

При $l \to 0$ в інтегралі домінуючу роль відіграють області, що забезпечують мінімальне значення показника степені. Отже, значення величини ζ_q визначається умовами (2.5) – (2.6) .

Нехай $\tilde{\alpha}(q)$ є значення a, що забезпечує умову мінімуму (2.6) для заданого значення q тоді

$$S_q \propto l^{q\tilde{a}-f(\tilde{a})}.$$

Згідно з визначенням (2.6)

$$D_q = 1\lim_{l\to 0} \frac{\ln S_q}{(q-1)\ln l} \cong \frac{q\tilde{a} - f(\tilde{a})}{(q-1)}$$

або

$$f(\tilde{a}) = q\tilde{a}(q) - D_q(q-1). \tag{2.7}$$

Вираз (2.7) диференціюємо по q. Враховуючи, що $\frac{\partial f}{\partial q} = \frac{\partial f}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial q}$ і умову (2.5), отримуємо

$$\tilde{a}(q) = \frac{d}{dq}\left[(q-1)D_q\right]. \tag{2.8}$$

Таким чином, алгоритм обчислення мультифрактального спектру полягає в наступному. Маючи вимірювання ξ_i, за формулою (2.5) обчислюють розмірність *D (q)* для різних значень *q* (як позитивних, так і негативних). Потім за формулою (2.8) визначають значення $\tilde{a}(q)$, що забезпечують мінімум для даного q. Після цього за формулою (2.7) обчислюють спектр $f(a)$.

2.7 Логпуассоновські моделі

У цьому пункті ми розглянемо моделі останнього покоління, що виникли в середині 90-х років. Першою описана модель, запропонована Ше і Левеком в 1994 році. Заснована на трьох гіпотезах, з яких дві здавалися не дуже переконливими, модель дала просту формулу для залежності ζ_q. За щасливим збігом обставин, в цей же час групою італійських і французьких дослідників експериментально був виявлений цікавий факт, що отримав назву розширеної автомодельності, який дозволив істотно підвищити точність експериментального визначення показників ζ_q для структурних функцій високих порядків. Нові експериментальні результати на диво добре збіглися з формулою Ше - Левека. Істотне узагальнення цієї моделі було зроблено Б. Дюбрюль [25], яка включила в модель і ідею розширеної автомодельности.

2.7.1 Модель Ше - Левека

Модель Ше - Левека тримається на трьох гіпотезах. Перша – це гіпотеза подібності, введена Колмогоровим в моделі К62

$$S_q(l) = \left\langle \delta v_n^q \right\rangle \sim \left\langle \varepsilon_l^{q/3} \right\rangle l^{q/3},$$

яка записувалася вище і у вигляді

$$\zeta_q = \frac{q}{3} + \tau_{q/3},$$

в якому передбачається існування степеневого закону $\left\langle \varepsilon_l^q \right\rangle \sim l^{\tau_q}$ для статистичних моментів поля дисипації енергії [26, 27].

Модель містить у собі і ідею мультифрактальності розвиненої турбулентності, суть якої полягає в тому, що в потоці співіснують області з різними законами скейлінга і що для моментів (структурних функцій) різного порядку визначальну роль відіграють області з різним скейлінгом. У моделі вважається, що дисипація енергії ε_l характеризується «ієрархією флуктуюючих структур» $\varepsilon_l^{(q)}$, які визначаються як відношення наступних моментів поля дисипації

$$\varepsilon_l^{(q)} = \lim_{q\to\infty} \frac{\left\langle \varepsilon_l^{q+1} \right\rangle}{\left\langle \varepsilon_l^q \right\rangle}. \qquad (2.9)$$

Послідовність відносних моментів $\varepsilon_l^{(q)}$ обмежена, з одного боку, членом $\varepsilon_l^{(0)}$, який відповідає середньому значенню швидкості дисипації $(\varepsilon_l^{(0)} = \overline{\varepsilon})$, і доданком

$$\varepsilon_l^{(\infty)} = \lim_{q\to\infty} \frac{\left\langle \varepsilon_l^{q+1} \right\rangle}{\left\langle \varepsilon_l^q \right\rangle}. \qquad (2.10)$$

з іншого боку. Відносні моменти (2.9) зручні тим, що всі вони мають розмірність швидкості дисипації. Поле дисипації вкрай неоднорідне і формується структурами з різними скейлінговими властивостями. Чим більше номер відносного моменту q, тим більш неоднорідні структури він описує. Вважається, що межа послідовності (2.10) існує і визначається видом граничних дисипативних структур, в яких швидкість дисипації досягає екстремально великих значень. Виходячи з експериментальних спостережень останніх років, автори моделі припустили, що ці граничні структури мають вигляд вихрових ниток з розмірністю $D = 1$.

Дві гіпотези, що залишилися стосуються властивостей відносних моментів $\varepsilon_l^{(q)}$. Гіпотеза 2 вводить універсальний зв'язок, що пов'язує старший момент з молодшим,

$$\varepsilon_l^{(q+1)} = A_q \varepsilon_l^{(q)\beta} \varepsilon_l^{(\infty)(1-\beta)}. \tag{2.11}$$

Співвідношення включає невідомий поки параметр β і є, напевно, найсильнішим припущенням, зробленим при побудові моделі. Зрозуміло, що будь-яка гіпотеза щодо зв'язку статистичних моментів різних порядків є, по суті, гіпотеза щодо функції розподілу випадкової величини, моменти якої розглядаються.

Третя гіпотеза стосується величини $\varepsilon_l^{(\infty)}$. Передбачається, що вона задовольняє степеневому закону

$$\varepsilon_l^{(\infty)} \sim l^{-2/3}.$$

Фізичним мотивуванням є те що величина $\varepsilon_l^{(\infty)}$ залежить від граничних дисипативних структур і має розмірність швидкості дисипації енергії. Отже , із міркувань розмірності

$$\varepsilon_l^{(\infty)} \sim \frac{\delta E^{\infty}}{t_l},$$

де δE^{∞} – густина енергії, що доступна для дисипації в ниткоподібних структурах. Вважається, що в цих дисипативних структурах має місце квазірозрив, тобто незалежно від масштабу $\delta v_l \approx \delta v_0$ і енергія не залежить від масштабу l. Масштаб часу приймається колмогорівським ($t_l \sim \overline{\varepsilon}^{-1/3} l^{2/3}$) , що призводить до оцінки

$$\varepsilon_l^{(\infty)} \sim \frac{1}{t_l} \sim l^{-2/3}.$$

На основі введених гіпотез можна отримати вираз для структурних функцій поля дисипації, а потім і поля швидкості. З третьої гіпотези випливає, що при $q \to \infty$

$$\varepsilon_l^{(q)} = \frac{\left\langle \varepsilon_l^{q+1} \right\rangle}{\left\langle \varepsilon_l^{q} \right\rangle} \sim \frac{l^{\tau_{q+1}}}{l^{\tau_q}} \sim l^{-2/3}$$

і, отже, при великих q

$$\tau_q = -\frac{2}{3} q + C. \tag{2.12 }$$

Користуючись уявленнями про фрактальну структуру з розмірністю D можна записати

$$\left\langle \varepsilon_l^{q} \right\rangle \sim l^{-2q/3} l^{3-D},$$

звідки випливає, що константа С має сенс корозмірності, а оскільки зроблено припущення про те, що структури є нитки, то їх корозмірність дорівнює двом.

Таким чином, $C = 2$. Для довільних значень q до виразу (2.12) слід додати функцію, вид якої визначається за допомогою другої гіпотези. Отже,

$$\tau_q = f(q) - \frac{2}{3}q + C,$$

причому $f(q) \to 0$ при $q \to \infty$. Вираз (2.11) перепишемо у вигляді

$$\frac{\left\langle \varepsilon_l^{q+2} \right\rangle}{\left\langle \varepsilon_l^{q+1} \right\rangle} = A_q \left(\frac{\left\langle \varepsilon_l^{q+1} \right\rangle}{\left\langle \varepsilon_l^{q} \right\rangle} \right)^{\beta} \varepsilon_l^{(\infty)^{(1-\beta)}},$$

еквівалентному рівнянню

$$\tau_{q+2} = (1+\beta)\tau_{q+1} - \beta\tau_q - \frac{2}{3}(1-\beta).$$

Рівняння для функції $f(q)$ має вигляд

$$f(q+2) - (1+\beta)f(q+1) + \beta f(q) = 0,$$

рішення якого є $f(q) = a\beta^q$ і, отже,

$$\tau_q = a\beta^q - \frac{2}{3}q + C.$$

Константи, що входять в рівняння визначаються із умов $\tau_0 = \tau_1 = 0$ $(\left\langle \varepsilon_l^0 \right\rangle = 1,\ \left\langle \varepsilon_l^1 \right\rangle = \bar{\varepsilon} \sim l^0)$.
З першої умови $a = -C = -2$,
з другої –

$$\beta = \frac{C - 2/3}{C} = \frac{2}{3}.$$

Остаточно маємо

$$\tau_q = -\frac{2q}{3} + 2\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^q\right),$$

а користуючись першою гіпотезою – гіпотезою подібності К62, отримуємо шукану формулу для показників ступеня структурних функцій поля швидкості

$$\zeta_q = \frac{q}{9} + 2\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{q/3}\right).$$

На рис.2.3 приведено експериментальні дані, взяті з різних робіт, наведені разом з кривими, що відповідають різним моделям.

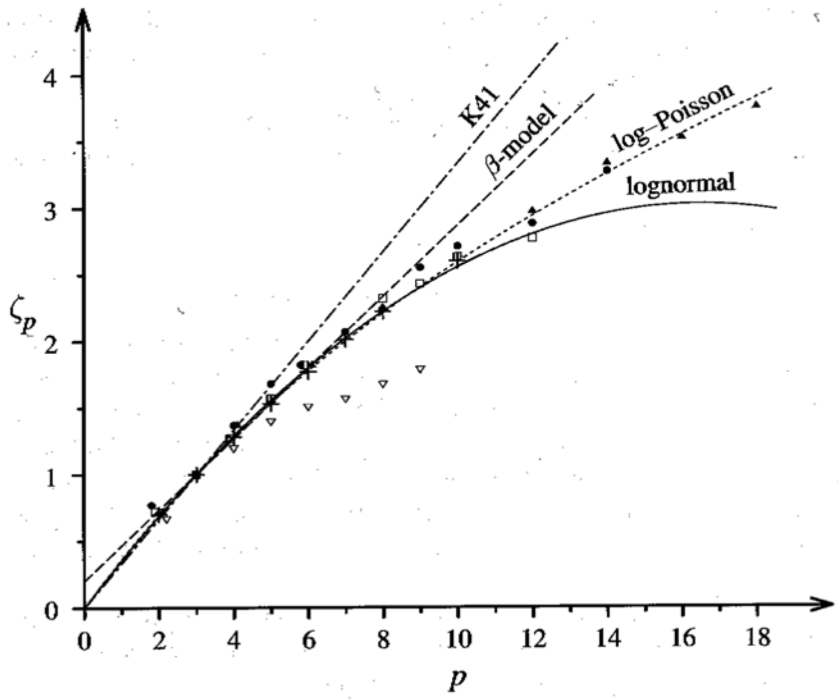


Рисунок 2.3 – Порівняння різних моделей турбулентних процесів [28]

2.7.2 Розширена автомодельність

Розширена автомодельність (Extended Self Similarity (ESS)) – це експериментально встановлений факт, що не знайшов ще достатнього теоретичного осмислення.

Перші результати були отримані при вимірах властивостей дрібномасштабної турбулентності в аеродинамічній трубі і опубліковані в роботі [27]. Мета роботи полягала у вивченні властивостей структурних функцій $S_q(l)$ і $T_q(l) = \left\langle \left|\delta v_l\right|^q \right\rangle$.

По-перше, в роботі Бензі було показано, що функції T_q статистично більш стійкі (для їх визначення потрібна менша кількість реалізацій) і підкоряються тим же степеневим законам, що й функції S_q (йдеться про функції непарних порядків, оскільки для парних функції просто збігаються). По-друге, було виявлено цікавий зв'язок між структурними функціями різних порядків.

На рис.2.4 показані результати вимірювання структурної функції другого порядку, отримані для течії в аеродинамічній трубі при трьох значеннях числа

Рейнольдса (квадрати – Re = 6000 , кружки – Re = 22500 та хрести – Re = 47000). Вивчаючи ці дані, можна бачити, що питання про ідентифікацію інерційного інтервалу далеко не просте навіть для досить високих значень числа Рейнольдса.

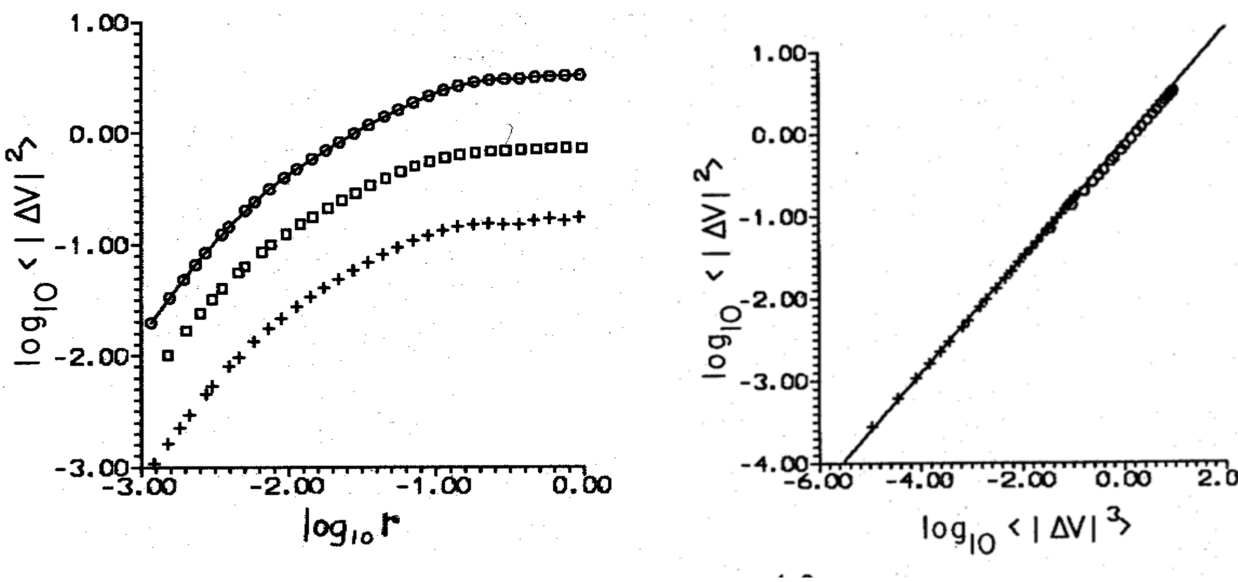


Рисунок 2.4. – Результати вимірювання структурної функції другого порядку, отримані для течії в аеродинамічній трубі при трьох значеннях числа Рейнольдса (квадрати – Re = 6000 , кружки – Re = 22500 та хрести – Re = 47000) [27].

Обробляючи результати вимірювань структурних функцій пульсацій швидкості, автори запропонували незвичайне представлення даних. По осі абсцис замість масштабу l була відкладена структурна функція третього порядку S_3. Несподіваний результат полягав у тому, що при представленні результатів в координатах $(\ln S_q, \ln S_3)$ інерційний інтервал стає більш вираженим – прямолінійна ділянка графіку продовжується до масштабів, які лише в кілька разів перевищують дисипативний масштаб λ. Важливо, що нахил кривої залишається при цьому незмінним.

Таким чином, виявлений ефект дозволяє значно збільшити точність визначення показників ζ_q.

Цікаво, що ESS- аналіз призводить до появи «інерційного інтервалу» і при відносно низьких значеннях числа Рейнольдса, коли в звичайному представленні інерційний інтервал не виявляється зовсім.

У більш загальному вигляді розширена автомодельність (ESS-аналіз) проявляється при будь-якому представленні виду

$$S_q(l) = S_p^{\zeta_q/\zeta_p}, \tag{2.13}$$

тобто розширення інерційного інтервалу відбувається при використанні осей координат будь-якої пари структурних функцій.

2.7.3 Модель Ше - Левека – Дюбрюль

На закінчення розглянемо узагальнення моделі Ше-Левека, запропоноване Б. Дюбрюль [25, 26]. В основі узагальнення лежать наступні ідеї. По-перше, використовуючи розширену автомодельність, позбутися від абсолютного масштабу *l*. По-друге, відмовитися від спроби отримати без параметричну модель. Останнє означає, що зменшується число гіпотез, апріорно закладених в модель, але ускладненням за це є додаткові параметри, що вимагають експериментального визначення. По-третє, замість величини ε_l розглядається безрозмірна величина

$$\pi_l = \frac{\varepsilon_l}{\varepsilon_l^{(\infty)}},$$

що є безрозмірною характеристикою поля дисипації енергії (або потоку енергії) на масштабі *l*.

У формулюванні Дюбрюль три гіпотези Ше - Левека набувають наступний вигляд:

I) модифікована гіпотеза подібності

$$\frac{\delta v_l^3}{\left\langle \delta v_l^3 \right\rangle} \stackrel{stat}{=} \frac{\varepsilon_l}{\left\langle \varepsilon_l \right\rangle} = \frac{\pi_l}{\left\langle \pi_l \right\rangle}, \tag{2.14}$$

де знак $\stackrel{stat}{=}$ означає наявність однакових статистичних властивостей;

II) ієрархія моментів

$$\frac{\left\langle \pi_l^{\,q+1} \right\rangle}{\left\langle \pi_l^{\,q} \right\rangle} = A_p \left(\frac{\left\langle \pi_l^{\,q} \right\rangle}{\left\langle \pi_l^{\,q-1} \right\rangle} \right)^{\beta}; \tag{2.15}$$

III) гіпотеза про переміжність (про наявність степеневого закону для величини $\left\langle \pi_l \right\rangle$)

$$\left\langle \pi_l \right\rangle \sim \left(\frac{\left\langle \delta v_l^3 \right\rangle}{\bar{\varepsilon} \lambda} \right)^{\Delta}. \tag{2.16}$$

Зв'язок модифікованої гіпотези подібності з гіпотезою подібності К62 буде обговорена нижче. Друга гіпотеза являє собою точну копію відповідної гіпотези Ше-Левека, переписаною в термінах величини π_l. У третій гіпотезі з'явився незалежний параметр Δ, що характеризує скейлінгові властивості екстремальних структур.

Гіпотези (2.14) – (2.16) дозволяють отримати після нескладних обчислень формулу для показників ζ_q. Для цього, користуючись другою гіпотезою, отримуємо зв'язок вищих моментів величини π_l з першим. Дійсно

$$\left\langle \pi_l^{\,q+1} \right\rangle = \left\langle \pi_l^{\,q} \right\rangle^{\beta+1} \left\langle \pi_l^{\,q-1} \right\rangle^{-\beta}$$

і можна побудувати ланцюжок виразів

$$\begin{gathered} \left\langle \pi_l^{\,2} \right\rangle = \left\langle \pi_l \right\rangle^{\beta+1}, \\ \left\langle \pi_l^{\,3} \right\rangle = \left\langle \pi_l^{\,2} \right\rangle^{\beta+1} \left\langle \pi_l \right\rangle^{-\beta} = \left\langle \pi_l \right\rangle^{1+\beta+\beta^2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ , \\ \left\langle \pi_l^{\,q} \right\rangle = \left\langle \pi_l \right\rangle^{\sum_{k=0}^{q-1} \beta^k}. \end{gathered}$$

Обчисливши суму ряду

$$\sum_{k=0}^{q-1} \beta^k = \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k - \sum_{k=q}^{\infty} \beta^k = \frac{1}{1-\beta} - \frac{\beta^q}{1-\beta} = \frac{1-\beta^q}{1-\beta},$$

отримуємо

$$\left\langle \pi_l^{\,q} \right\rangle = \left\langle \pi_l \right\rangle^{\frac{1-\beta^q}{1-\beta}}.$$

Використовуючи третю гіпотезу (2.16), отримуємо співвідношення

$$\left\langle \pi_l^{\,q} \right\rangle \sim \left\langle \delta v_l \right\rangle^{\Delta \frac{1-\beta^q}{1-\beta}}.$$

Вираз для структурних функцій пульсацій поля швидкості при цьому буде

$$\left\langle \delta v_l^q \right\rangle \sim \left\langle \delta v_l^3 \right\rangle^{q/3} \frac{\left\langle \pi_l^{\,q/3} \right\rangle}{\left\langle \pi_l \right\rangle^{q/3}} = \left\langle \delta v_l^3 \right\rangle^{\frac{q}{3}(1-\Delta)+\Delta \frac{1-\beta^{q/3}}{1-\beta}}.$$

Тоді формула для показників ступеня є

$$\zeta_q = \frac{q}{3}(1-\Delta) + \Delta\frac{1-\beta^{q/3}}{1-\beta}.$$

У результуючу формулу входять два параметри, які повинні бути визначені дослідним шляхом: β і Δ. При $\beta = \Delta = 2/3$ ми маємо формулу Ше - Левека.

Ще один важливий результат роботи Дюбрюль полягав у тому , що був показаний сенс гіпотези про «ієрархічний зв'язок моментів». Розподілу Пуассона відповідає функція розподілу ймовірності виду

$$P(y) = \frac{\mu^y e^{-\mu y}}{\Gamma(y+1)},$$

де $\mu = \langle y \rangle$, а Г є гама-функція. Логпуасонівський розподіл виходить при умові $y = \dfrac{\ln \pi_l}{\ln \beta}$.

Слід зазначити, що в останні роки були зроблені спроби описати випадкові турбулентні поля і за допомогою інших функцій розподілу (наприклад , лог- леви) і остаточну відповідь на питання про закони розподілу ймовірності в турбулентних потоках ще не дано.

2.8 Ієрархічний базис для турбулентних полів

Для чисельних методів розв'язання рівнянь руху рідини найчастіше використовуються або сіточні, або спектральні методи, або їх комбінація. І ті, й інші можна віднести до проекційних методів вирішення рівнянь в часткових похідних, коли для розв'язку використовують проекції всіх полів на функціональні базиси.

У сіткових методах функції представлені значеннями в точках, густина яких пов'язана із спектральними властивостями розглянутих полів (дрібномасштабні вихори не повинні провалюватися між точками сітки). Більш строго цей зв'язок виражається теоремою Котельникова, згідно з якою функція *f (x)*, спектр якої обмежений просторовою частотою $2\pi / h$, може бути представлена сумою функцій відліків, центри яких розміщені на сітці з кроком h. Очевидно, що сіткове уявлення ефективно при описі локальних структур – дрібномасштабний вихор описується невеликим числом точок, що знаходяться у відповідній області простору. Водночас, для опису навіть дуже простого за структурою великомасштабного вихору потрібне використання всіх базисних функцій.

Спектральні методи використовують розкладання по Фур'є – гармонікам. У цьому випадку кожна базисна функція описує, по суті, систему когерентних вихорів, що займає весь простір. У такому представленні дуже просто описати вихор, що займає всю область, або періодичну систему вихорів – і в тому, і в іншому випадку достатньо однієї базисної функції. Однак, якщо потрібно описати окремий вихор, що займає малу частину розглянутої області, то буде потрібен весь гармонійний ряд.

При цьому сіточні методи ефективні при обчисленні нелінійних членів, так як дозволяють виразити значення в точці через невелике число сусідніх точок, але призводять до великих витрат машинного часу при вирішенні рівняння Пуассона, що вимагає побудови ітераційного процесу, в який залучені всі точки області. Спектральні методи, навпаки, роблять розв'язки рівняння Пуассона тривіальним, але призводять до дуже складної структури нелінійних членів [28, 29].

Проблеми двох функціональних базисів пов'язані з їх локалізованістю в фізичному і в Фур'є – просторах. Сітки строго локалізовані у фізичному просторі, але спектр точки (дельта-функції) є білий шум. Це означає , що функції делокалізовані в просторі Фур'є. Зворотна ситуація виникає при розкладанні Фур'є. Кожна гармоніка представляє строго одну частоту, але відповідна їй функція займає весь фізичний простір.

У турбулентному потоці співіснують вихори самого різного масштабу, але найбільш ефективні взаємодії відбуваються між вихорами (структурами), близькими і в фізичному, і в Фур'є -просторі.

Перше очевидно – щоб вихори взаємодіяли, вони повинні перекриватися в просторі. Друге твердження становить основу концепції каскадних процесів – взаємодіють вихори порівнянних розмірів (якщо розміри не порівняні, то маленькі вихори просто переносяться великими без обміну енергією). Це змушує звернутися до пошуку спеціальних функцій, що більш точно відповідають структурі турбулентного потоку.

У теорії турбулентності важливу роль відіграє ідея масштабної подібності. Це означає, що шуканий базис повинен бути складений з подібних функцій.

Ще один недолік використання рядів Фур'є полягає в низькій інформативності високих частот. Добре зрозумілий сенс розгляду вихорів з характерним розміром L, L/2, L/3, ... , але окремий опис масштабів L/957, L/958, L/959, ... і т.д. мало виправданий. Це міркування наводить на думку про необхідність використання функцій, масштаб яких змінюється прогресивно – таке співвідношення виходить при рівномірному розбитті простору масштабів в логарифмічному представленні.

Підсумовуючи сказане, можна сформулювати вимоги, яким повинен задовольняти функціональний базис, призначений для опису турбулентних потоків:

1) функції базису повинні бути локалізовані і в фізичному, і в Фур'є - просторах;

2) функції повинні бути подібні і описувати ієрархію вихорів прогресивно убуваючих масштабів;

3) дрібномасштабні вихори повинні переноситися в поле вихорів більшого масштабу;

4) при підстановці в рівняння Нав'є - Стокса функціональний базис повинен призводити до слабозв'язаної динамічної системи.

3. ВИКОРИСТАНІ СУПУТНИКОВІ СПОСТЕРЕЖЕННЯ

Для аналізу характеристик сонячного вітру на орбіті Землі та розгляду властивостей плазмового потоку в найбільш збуреній області магнітосфери – магнітошарі – проведено відбір фізично однорідних вимірів ферозондових магнітометрів космічного апарату С3 місії «Кластер-2» з частотою опитування 22,5 Гц.

Приклади розглянутих змін флуктуацій магнітного поля приведено на рис.3.1.

Із рисунків добре прослідковується, що флуктуації в магнітошарі суттєво відрізняється від незбуреного сонячного вітру насамперед набагато більш високою мінливістю всіх параметрів і плазми, і магнітного поля. Дійсно, безпосередньо виміряні значення модуля магнітного поля В сильно флуктуюють щодо своїх середніх значень. Ці флуктуації спостерігаються в самому широкому діапазоні частот.

В якості кількісної міри рівня варіацій будь-якого параметра зручно взяти його відносне стандартне відхилення (RSD), тобто стандартне відхилення параметра на деякому інтервалі, віднесене до його середнього значення на цьому інтервалі.

З даних видно, що відносні варіації поля в магнітошарі мають значно більш широкий розподіл, а їх середні значення перевищують значення в сонячному вітрі приблизно в 2–3 рази.

Із аналізу 20-ти подій можна виділити, що при переході із СВ до МШ рівень флуктуацій значно змінювався:

- в плазмі сонячного вітру (СВ) дисперсія варіацій нормована на поточне середнє значення складає $\delta B/B = 0.05 - 0.25$;
- в форшоковій області (ФШ) рівень флуктуацій $\delta B_y/B = 0.3 - 0.4$, $\delta B/B = 0.2 - 0.3$;
- після перетину ударної хвилі (УХ) в постшоковій області (ПШ) рівень флуктуацій зростає у декілька разів в порівнянні з форшоком і відповідає значенням – $\delta B_y/B \approx \delta B/B \sim 0.5$;
- в глибині магнітошару (МШ) рівень флуктуацій спадає до $\delta B/B \sim 0.3$.

Максимальний рівень флуктуацій відповідає моменту входження супутника із плазми сонячного вітру в магнітошар.

У всіх областях кут між хвильовим вектором і напрямом поля, в середньому, досить великий і помітно не змінюється при переході від однієї області до іншої.

Максимальний рівень флуктуацій відповідає моменту входження супутників із плазми сонячного вітру в магніто шар.

Тому, одним із питань які досліджувалися в рамках даного звіту це питання питання щодо джерел підвищеного рівня варіацій в магнітошарі. Перш за все, необхідно з'ясувати – чи є ці варіації лише проявом ("посиленням") аналогічних варіацій в сонячному вітрі, тобто мають зовнішнє джерело, або вони генеруються в самому магнітошарі, тобто мають внутрішнє джерело.

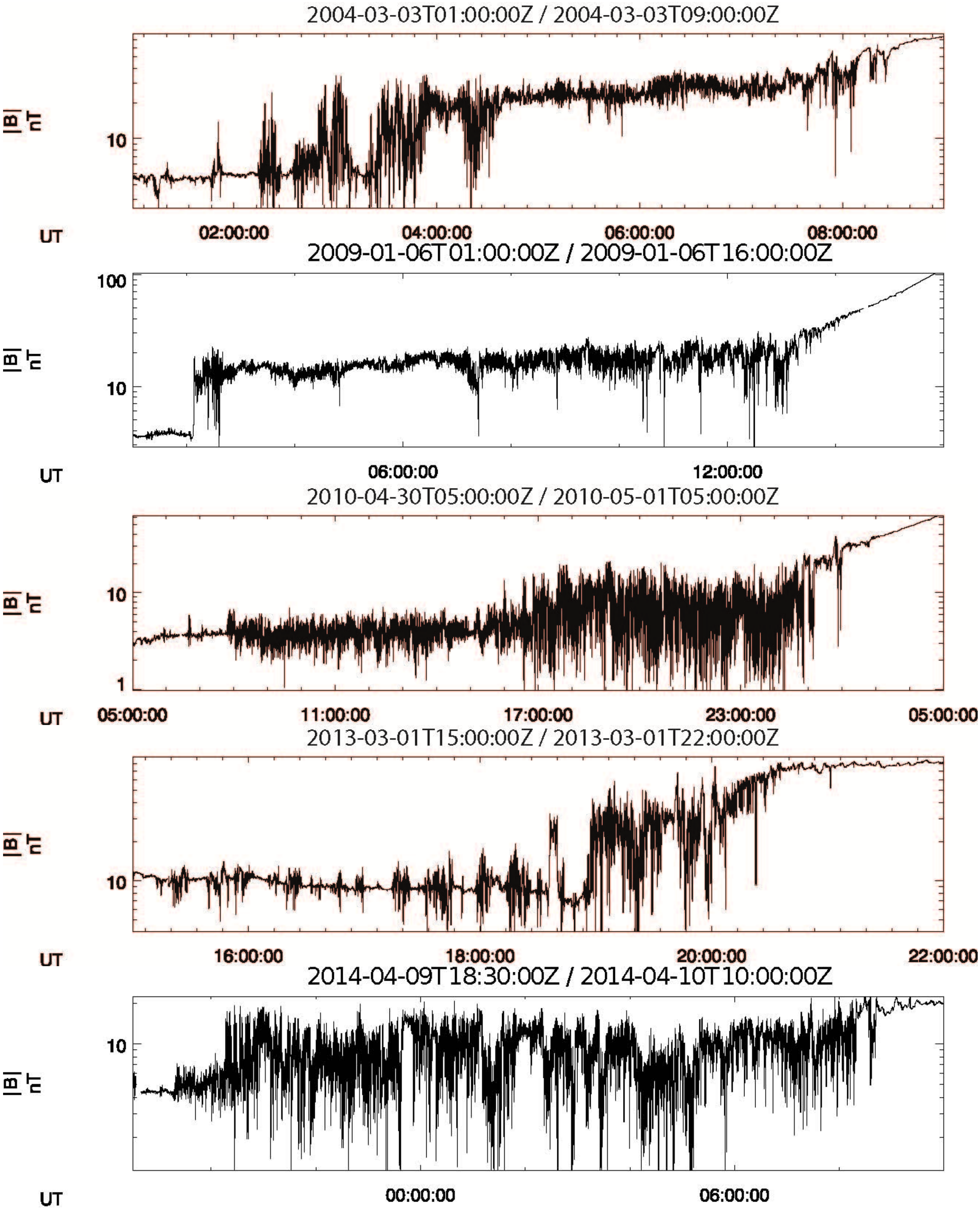


Рисунок 3.1 – Прикдади розглянутих флуктацій магнітного поля

Дослідження цього питання показало, що із зростанням рівня варіацій в сонячному вітрі рівень варіацій в магнітошарі також зростає, що відповідає припущенням про «посилення» їх у магнітошарі. Однак дуже важливо, що навіть при майже повній відсутності в сонячному вітрі флуктуацій магнітного поля, в магнітошарі існують варіації, що мають, в середньому, вельми високий рівень.

Представлені вище, результати дозволяють зробити наступний важливий висновок: звичайно, всі істотні зміни в плазмі сонячного вітру і в міжпланетному магнітному полі відображаються в збуренні аналогічних параметрів у магнітошарі. Однак зворотне судження буде невірним – зовсім не всі спостережувані в магнітошарі варіації параметрів мають своїм джерелом флуктуації сонячного вітру або ММП, значна частина з них генерується в самому магнітошарі або на його межах.

У рамках такого представлення суттєвим є питання про зовнішні чинники, які відповідають за розвиток варіацій параметрів у магнітошарі. Для цього було проведено порівняння залежності варіацій магнітного поля в магнітошарі від кута між вектором ММП і нормаллю до ударної хвилі в тому місці, де даний об'єм плазми увійшов до магнітошару , так званий кут Θ_{Bn} . Залежність показана на рис. 3.2.

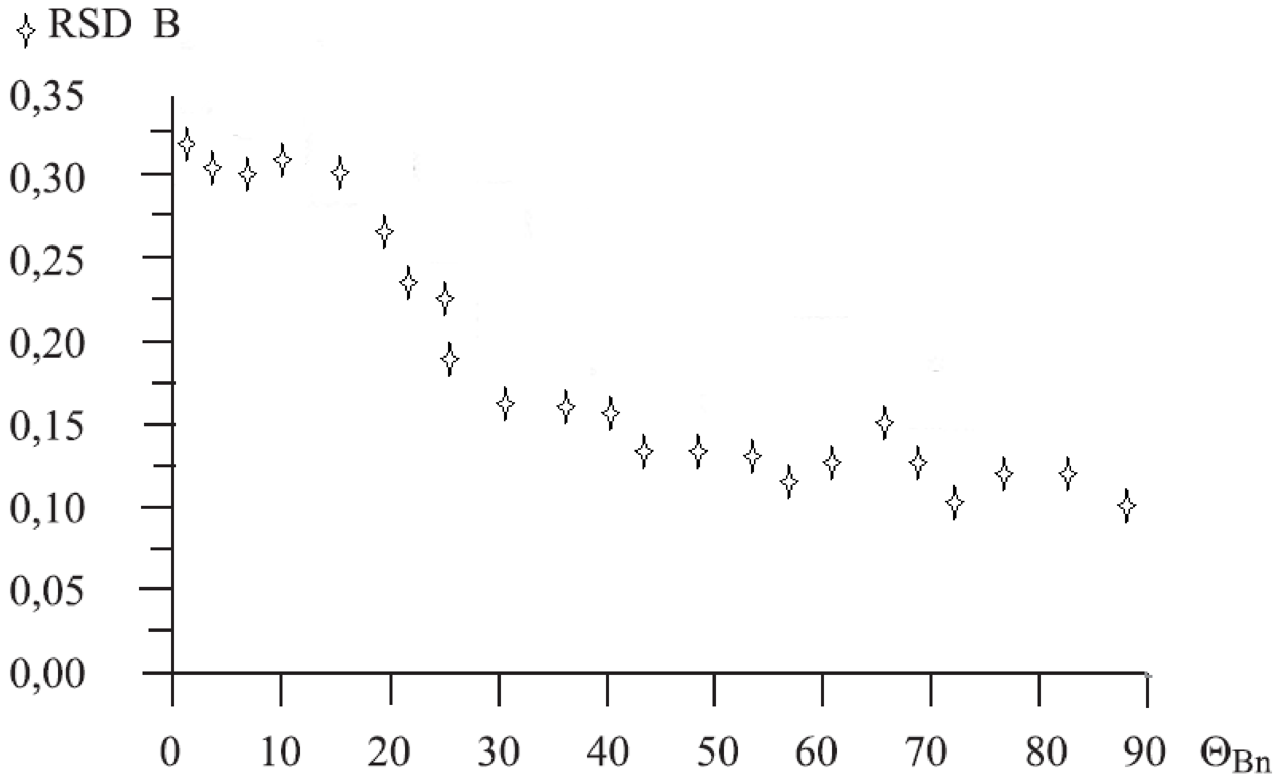


Рисунок 3.2 – Залежність рівня відносних варіацій модуля магнітного поля RSD, B від кута Θ_{Bn}

З рисунка, добре видно, що із збільшенням цього кута, тобто із переходом від квазіпаралельної до квазіперпендикулярної ударної хвилі, рівень варіацій магнітного поля в магнітошарі сильно знижується.

Таким чином, найбільш імовірним механізмом генерації збурень будуть процеси на навколоземній ударної хвилі. На користь цього свідчить і та обставина, що жодна з наявних гідродинамічних або МГД-моделей потоку плазми в магнітошарі не може описати (передбачити) наявність подібних варіацій, які є, очевидно, наслідком кінетичних, а не МГД-процесів.

4 АНАЛІЗ СУПУТНИКОВИХ ДАНИХ

4.1 Фрактальний розгляд

Слід відмітити, що на сьогоднішній день немає однозначного визначення «фракталу». Згідно Лаверьє [24], фрактал – геометрична фігура, в якій один і той же фрагмент повторюється при кожному зменшенні масштабу. Фрактали, які характеризуються даними властивостями і які утворюються в результаті простої рекурсивної процедури (комбінації лінійних перетворень) називають конструктивними фракталами. Таким чином, конструктивний фрактал – це множина, яка отримується в результаті лінійних (афінних) стиснені відображення подібності. Результуюче стиснене відображення характеризується стійкою нерухомою «точкою» – фракталом.

Класичним прикладом конструктивного фракталу може служити дерево, стовбур якого розділений на дві вітки. В свою чергу, кожна із цих віток поділяється на дві менші і т. д. Подумки ми можемо проробити цю процедуру нескінченне число разів і отримати деревоподібний фрактал з нескінченним числом віток. Кожну окрему вітку можна, в свою чергу, розглядати як окреме дерево. Ця конструкція має подібність із двійковою системою обчислення.

Основні властивості фрактальних множин:

– мають тонку структуру (містять довільно малі масштаби);

занадто нерегулярні, щоб могли бути описані за допомогою геометричних підходів;

– мають форму самоподібності;

– зазвичай «фрактальна розмірність» множини більша, ніж його топологічна розмірність;

– у більшості випадків фрактальні множини визначаються рекурсивно.

При аналізі на масштабі τ, який кратний дискретності вимірів в часі індукції магнітного поля Δt. Весь часовий діапазон ($N\Delta t$) розділений на підмножину

$$B_{k,m} = \left\{ B(m\Delta t), B(m\Delta t+\tau), B(m\Delta t+2\tau), ..., B(m\Delta t + \left[(N-m)/k \right] \tau) \right\},$$

де $k(=\tau/\Delta t),\ m=1,2,.....,k,$ і в квадратних дужках вказано значення що не перевищує весь часовий інтервал вимірювань.

Довжина $L_m(\tau)$ підмножини $B_{k,m}$ визначається як

$$L_m(\tau) = \frac{(\sum_{i=1} \left| B(m\Delta t + i\tau) - B(m\Delta t + (i-1)\tau) \right|) A_m}{\tau}.$$

Коефіцієнт A_m, визначається співвідношенням $(N-1)/(\left[(N-m)/k \right] k)$ і є, по суті коефіцієнтом нормування для регулювання розходження в числі даних (кількості вимірів) розглянутої підмножини. При усередненні довжина $L_m(\tau)$ по

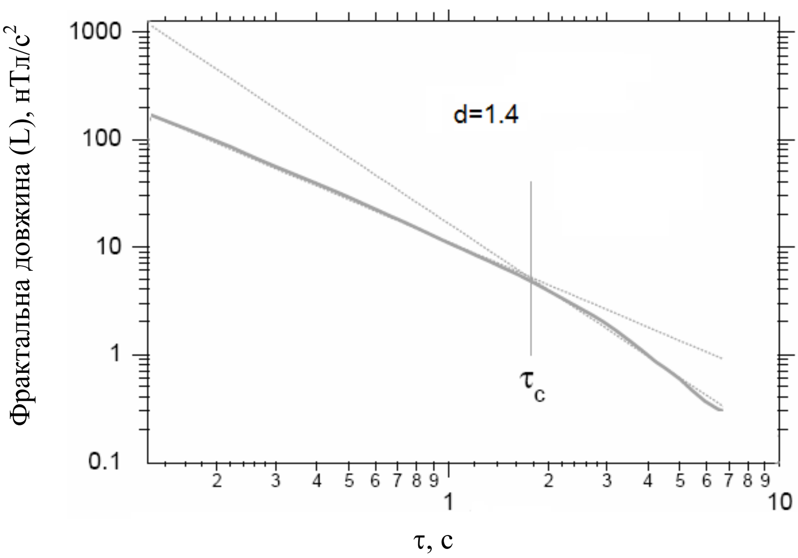
k точках отримують співвідношення $L(\tau) \sim \tau^{-d}$, в такому випадку *B(t)* самоаффінні дані, а d – фрактальна розмірність [30].

Крім того, для такого типу даних має місце залежність спектральної потужності від частоти $P(f) \sim f^{-n}$, $n = 5 - 2d$, $d \neq 1$, $d \neq 2$.

Переваги фрактального аналізу над традиційним Фур'є аналізом були відзначені ще в роботі [31].

Для апробації цього методу дослідження турбулентних процесів і порівняння отриманих результатів із Фур’є аналізом було використано виміри флуктуацій магнітного поля в форшоковій області (рис. 4.1).

А



Б

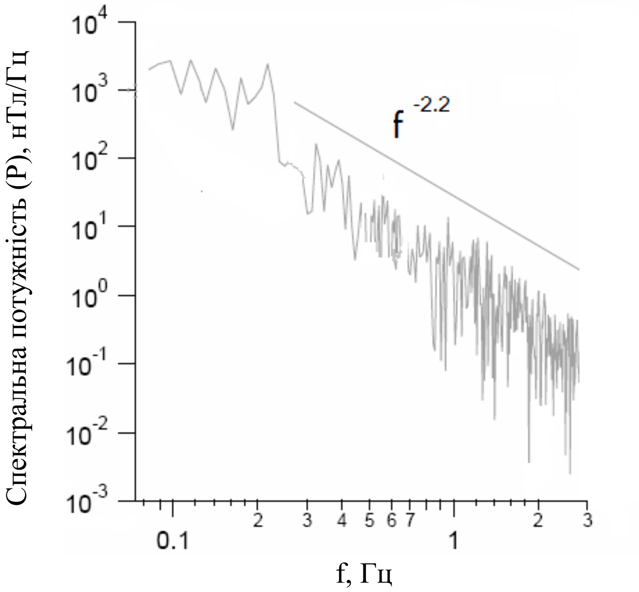


Рисунок 4.1 – Порівняння між різними типами аналізу флуктуацій магнітного поля для частини форшокової області (2010/03/27): а – лінійний фрактальний аналіз; б – спектральний аналіз.

Слід відмітити, що відносний рівень флуктуацій (значення флуктуацій нормоване на поточне середнє значення) в даній області складав – 0.3.

Дослідження масштабних властивостей флуктуацій магнітного поля в форшоковій області подано на рис. 4.1, де на рис. 4.1а представлено результати фрактального аналізу, а на рис. 4.1б – результати Фур’є аналізу. Фрактальна довжина характеризується «гладенькою» структурою, Фур'є - спектр показує, велику кількість нерегулярних коливань. Апроксимація фрактальних результатів двома пунктирними лініями показує наявність двох областей $L(\tau)$. Зміна нахилу фрактальної довжини відбувається на масштабі біля 1.8 сек, фрактальна розмірність першої області рівна 1.4. Це значення добре узгоджується із значенням спектрального індексу для спектрального аналізу $n = 5 - 2 \cdot 1.4 = 2.2$.

Часовий масштаб на якому відбувається зміна фрактальної розмірності близький до значення іонноциклотронної частоти і, таким чином, характеризує різні масштаби розгляду турбулентних процесів в форшоковій області магнітосфери Землі.

Аналізуючи результати фрактального і спектрального аналізу флуктуацій магнітного поля в форшоковій області можна виділити наступні закономірності: фрактальний аналіз характеризується значно більшою стабільністю і локалізацією в часі ніж спектральний аналіз; крім того, він дає надійні результати навіть при аналізі на масштабах, які складають значну частину всього інтервалу вимірів.

Слід відмітити, що підтверджено лінійний зв'язок між отриманою спектральною розмірністю і показником степені перекачки енергії в турбулентному процесі для форшокової області.

Наведений вище фрактальний аналіз базується на методі (критерії) «yardstrick» довжини, який розглядає фрактальної довжини різних масштабів кратних дискретності вимірів. Такий підхід не дозволяє дати суттєвої інформації про еволюцію системи. Для цієї мети аналізують функцію густини ймовірності флуктуацій досліджуваних параметрів (PDF–аналіз)[1].

---

[1] Слід відмітити, що функція розподілу густини ймовірності $P(\vec{r},t)$ містить повну інформацію про випадкове поле $f(\vec{r},t)$, однак, її визначення в повному обсязі практично неможливо. Відомо, що заданням густини ймовірності еквівалентно задання послідовності (у принципі – нескінченної) статистичних моментів

$$Mf^m = \int f^m P(f)df.$$

При цьому момент нульового порядку дорівнює одиниці завдяки умові нормування

$$Mf^0 = \int P(f)df = 1,$$

а момент першого порядку, який називають також математичним очікуванням, дає середнє значення величини

В роботі аналізувалася структурна функція першого порядку яка визначається співвідношенням $S(\tau) = \langle |B(t+\tau) - B(t)| \rangle$, [32 - 34].

При наявності самоподібності (що є в загальному випадку наслідком властивості симетрії рівнянь які використовуються для опису фізичної природи процесів) будемо мати зв'язок між структурною функцією першого порядку та масштабом розглянутих подій $\langle |B(t+\tau) - B(t)| \rangle \sim \tau^{-s}$. Показник степеня s - називають ще показником Гельдера, при цьому при $s = 0.5$ ми маємо нормальний Гаусовий розподіл флуктуацій магнітного поля, який властивий для довільного випадкового процесу (броунівський рух). Чим суттєвіше значення s відрізняється від значення 0.5, тим на довших масштабах є кореляції в системі і наявні реорганізаційні процеси.

Результати PDF-аналізу для плазми сонячного вітру, форшокової області та області магнітошару подано на рис. 4.2 – 4.4. Еволюція висоти максимуму функції густини ймовірності флуктуацій магнітного поля при аналізі на різних часових масштабах представлена на рис. 4.5.

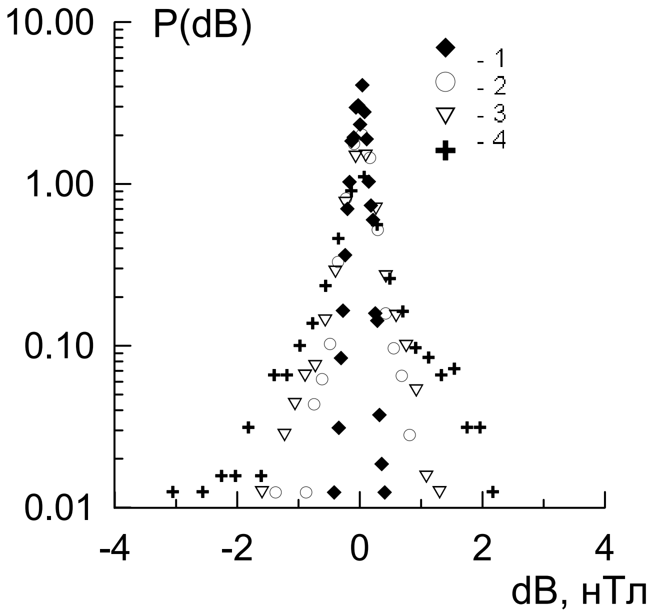


Рисунок 4.2. – Розподіл PDF магнітного поля (2010/03/21)з різним дискретним часом τ для плазми СВ: 1– $\tau, 2 - 16\tau, 3 - 64\tau, 4 - 128\tau$.

$$Mf^1 = \int f P(f) df = \langle f \rangle.$$

Для моментів другого і більш високих порядків зазвичай використовують центральні моменти, обчислювані щодо середніх значень

$$M(f - \langle f \rangle)^m = \int (f - \langle f \rangle)^m P(f) df.$$

При цьому центральний момент другого порядку називається дисперсією.

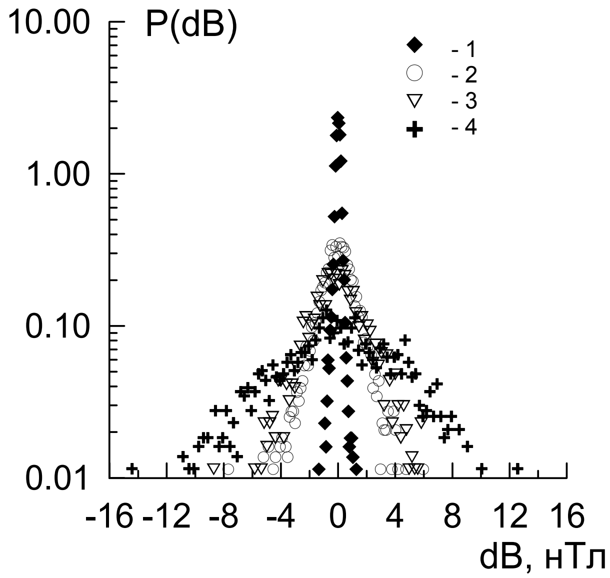


Рисунок 4.3. – Розподіл ймовірності коливань магнітного поля (2010/03/21) з різним дискретним часом τ для області магнітошару: 1– τ, 2 – 16τ, 3 – 64τ, 4 – 128τ.

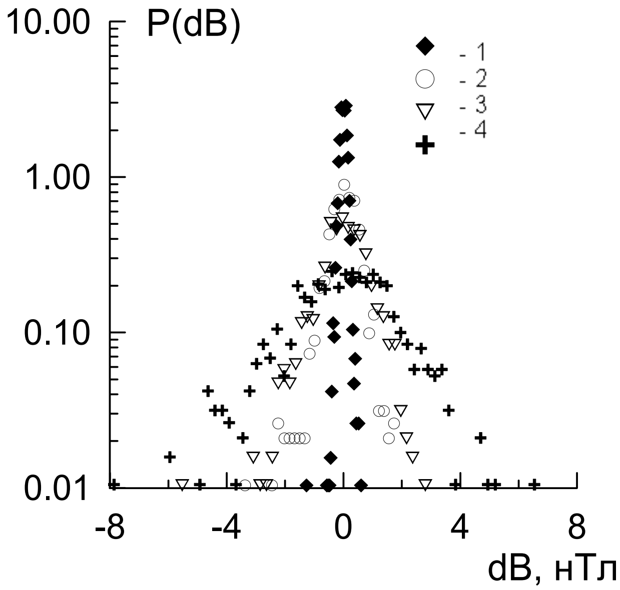


Рисунок 4.4. – Розподіл ймовірності коливань магнітного поля (2010/03/21) з різним дискретним часом τ для форшокової області: 1– τ, 2 – 16τ, 3 – 64τ, 4 – 128τ.

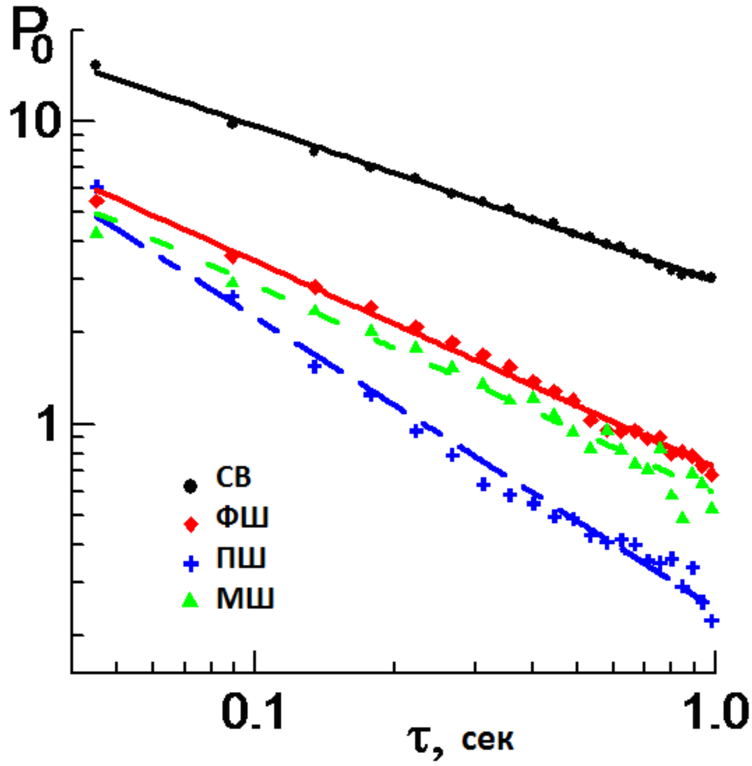


Рисунок 4.5 – Значення максимуму функції розподілу густини ймовірності флуктуацій магнітного поля P(0) від кроку по часу в логарифмічному масштабі для 01/03/2013. Експериментальні точки апроксимувалися прямою $P \sim \tau^{-s}$: СВ – плазма сонячного вітру, ФШ – область форшоку, МШ – магнітошар. Значення s подані в таблиці 4.1

Таблиця 4.1. Показники степеня значення максимуму функції розподілу густини ймовірності флуктуацій магнітного поля для різних подій і областей в діапазоні до 1 сек.

	2004/03/03	2013/03/01	2014/04/09	2009/01/06	2010/04/30
СВ	0.54	0.51	0.53	0.55	0.48
ФШ	0.76	0.68	0.89	0.66	0.88
ПШ	0.96	0.97	0.91	0.99	-
МШ	0.66	0.69	0.68	0.96	0.73

Із графіків і параметрів зібраних в таблиці можна зробити висновок, що в діапазоні до 1 сек за виключенням плазми сонячного вітру, розподіл помітно відхиляється від гаусівського. На масштабах більше 1 сек. значення параметрів лежить в діапазоні 0.62 до 0.47

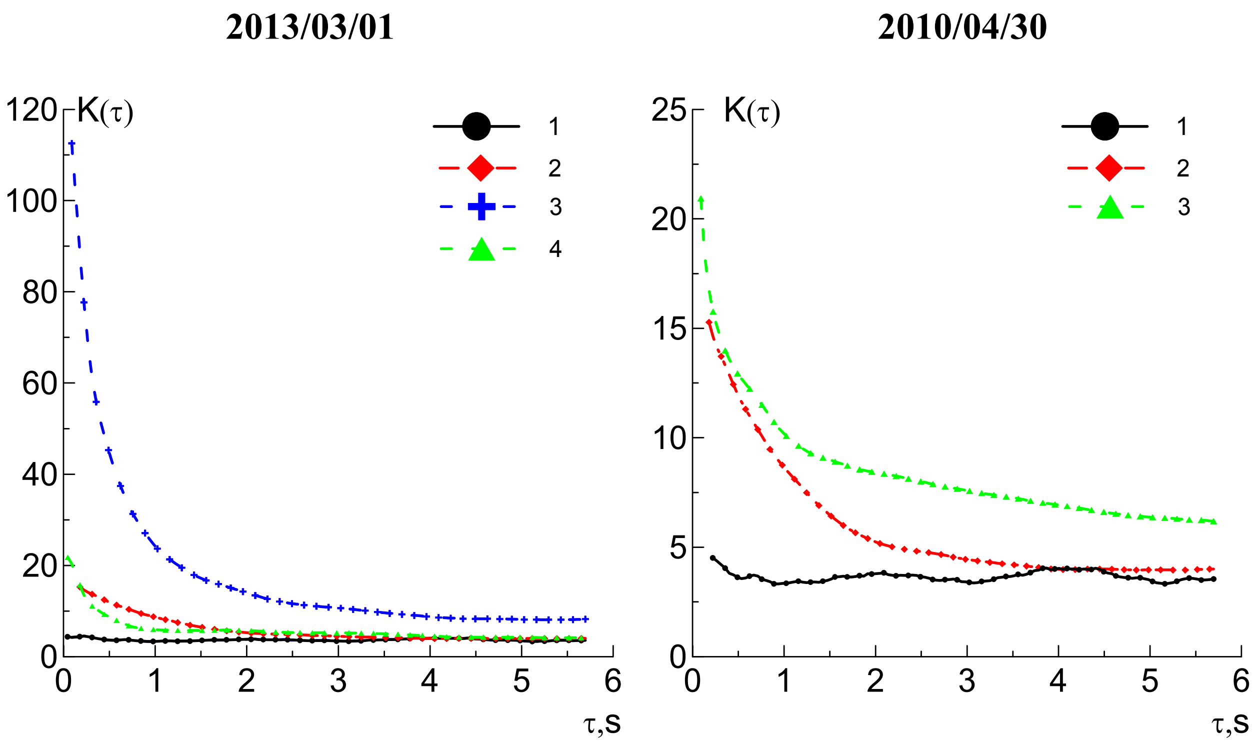
Важливою особливістю отриманих результатів є наявність переміжності в перехідних областях магнітосфери Землі. Для плазми ж сонячного вітру зміна максимуму функції густини ймовірності подібна до типового Гаусового розподілу – переміжності немає.

Про відхилення функції розподілу густини ймовірності флуктуацій досліджуваних параметрів від нормального розподілу можна говорити й із аналізу значення ексцесу, який визначається через моменти другого і четвертого порядку формулою [35]:

$$K(l)=\frac{S_4(l)}{\left(S_2(l)\right)^2},$$

де $S_4(l)=\left\langle \left|X(x+l)-X(x)\right|^4\right\rangle$ та $S_2(l)=\left\langle \left|X(x+l)-X(x)\right|^2\right\rangle$ – моменти четвертого та другого порядків, $X(x)$ – досліджуваний параметр. Ексцес може приймати значення від 1 до ∞. Для нормального розподілу $K(l)=3$. Незважаючи на те, що величина ексцесу є одним із способів відображення характеру переміжності, проте вона не дозволяє зробити кількісного порівняння ступеня і механізму переміжного процесу. Якщо значення ексцесу на різних часових масштабах залишається постійним, то це вказує на відсутність переміжності.

При визначенні значення ексцесу флуктуацій магнітного поля аналізувалась залежність $K(\tau)=\frac{S_4(\tau)}{\left(S_2(\tau)\right)^2}$, від масштабного параметра τ, де зсув за часом для вимірів місії „Кластер-2”, як і при розгляді особливостей функції густини ймовірності флуктуацій магнітного поля, був кратним 0.0445 с. Значення ексцесів для плазми сонячного вітру, перехідного шару представлені на рис. 4.6 - 4.7.



1 – СВ, 2 - ФШ, 3 – ПШ, 4 – МШ 1 – СВ, 2 - ФШ, 3 – МШ

Рисунок 4.6 – Значення ексцесу для плазми сонячного вітру та перехідних областей

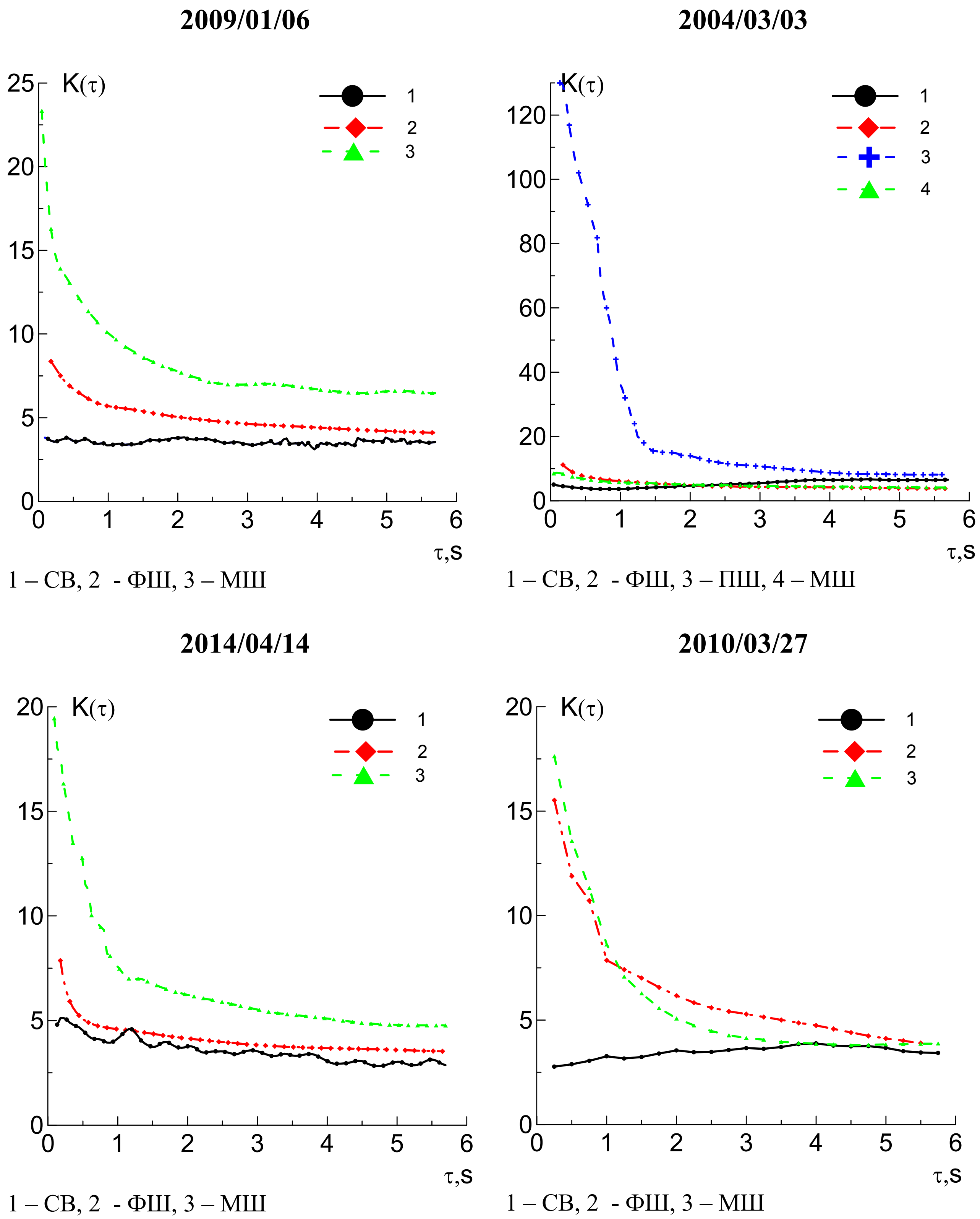


Рисунок 4.7 – Значення ексцесу для плазми соняччного вітру та перехідних областей

З графіків видно, що для плазми СВ значення функції $K(\tau)$ коливається близько 3 (нормальний розподіл). Для інших областей значення функції $K(\tau)$

на малих масштабах приймає значення від 120 до 10, при τ □ 1 с ексцес різко спадає, а на часових масштабах більше 2 с виходить на значення, близьке до 3. Таким чином, для перехідних областей на малих часових масштабах ми маємо розподіл з гострішою вершиною і крутизною крил, більшою, ніж для нормального розподілу. Отримані залежності повністю підтвердили результати, отримані при аналізі функції густини ймовірностей флуктуацій магнітного поля та підтверджують наявність переміжності турбулентних процесів на малих масштабах в перехідних областях магнітосфери.

4.2 Мультифрактальний аналіз

Є випадки, в яких один або два значення фрактальної розмірності не відображають реальні властивості масштабування. У цьому випадку динаміка системи може бути описана за допомогою організованої критичності [17]. При цьому в літературі розглядають особливості з використанням мультифрактального підходу.

Властивість узагальненої самоподібності і мультифрактальності характеризується спектром сингулярностей (мультифрактальним спектром). Для оцінки спектрів сингулярностей *D(h)* і показників Гельдера *h* можна використати ланцюг

$$h = d\varsigma / dq,\ D(h) = qh - \varsigma(q) \Leftarrow\ S_q(\tau) = \left\langle \left| B(t+\tau) - B(t) \right|^q \right\rangle \sim \tau^{\varsigma(q)}$$

На Рис. 4.8 – 4.9 наведено розраховані значення діапазон показників Гельдера для різних порядків моменту. З аналогії між мультифрактальним формалізмом і статистичною термодинамікою [13, 19], змінні h і q відіграють таку ж роль в статистичному описі процесу, що енергія і зворотня температура в термодинаміці.

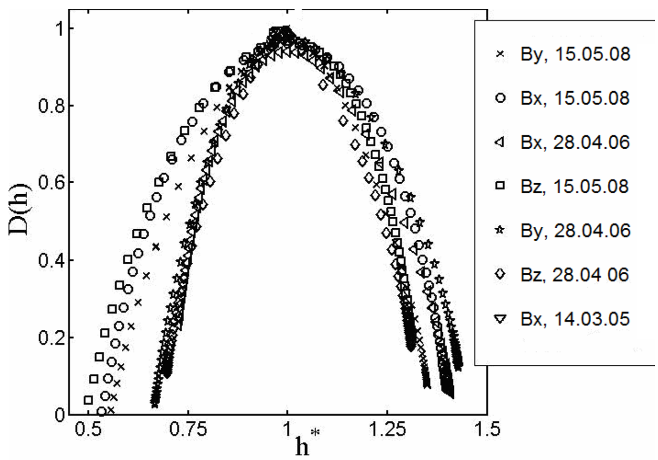


Рисунок 4.8 – Мультифрактальний спектр $D(h)$ в залежності від нормованого показника Гельдера $h^*=1+(h-h_{Dmax})$ (центроване на 1, значенння в максимумі h_{Dmax}).

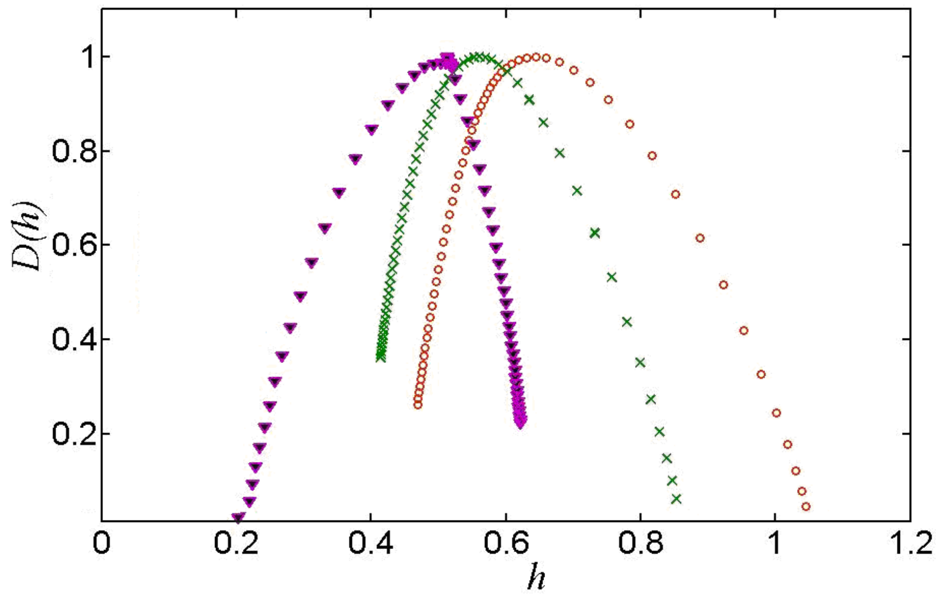


Рисунок 4.9 – Значення мультифрактального спектру $D(h)$ в залежності від показника Гельдера для різних перехідних областей магнітосфери Землі (2010/03/27): трикутники – форшокова область, кружки – постшокова область, хрестики – область магнітошару

Із рисунка 4.9 можна відмітити, що для всіх флуктуації магнітного поля які було зараєстровано в перехідних областях магнітосфери Землі має місце уширений (параболічний) вигляд мультифрактального спектру. Саме уширення і колоколоподібність – типові ознаки мультифрактальності стохастисних процесів. Слід відмітити, що для броунівського процесу (турбулентність колмогорівського типу) *D(h)* є точкою з показником Гельдера h=1/3, тобто процес характеризується одним показником (значенням). Різниця $h_{max} - h_{min}$ є кількісною характеристикою спектру, яку можна використовувати як показник степені відхилення від ізотропної турбулентності – колмогорівського процесу. Уширення спектру *D(h)* для проаналізованих областей магнітосфери лежить в межах від 0.4 – 0.7. Найбільше уширення спостерігається для постшокової області, а найменше для форшоку.

Серія додатніх вимірів у часі може бути представлена як $\varepsilon(t) = \left|B(t+\Delta t) - B(\mathrm{t})\right|^2$ із яких можна знайти співвідношення $d\mu = \varepsilon(t)\,\mathrm{dt/\,T}\left\langle \varepsilon \right\rangle$, де розглядаємо значення флуктуацій магнітного поля, Т це загальний час, а $\left\langle \varepsilon \right\rangle$ – це середнє значення ε. Із вимірів можна знайти ряд $p_l(\tau) = \int d\mu,$ де $\tau = 2^n \Delta t$ і часткова функція може бути визначена, як $\Gamma(q,t) = \sum p_l(\tau)^q \approx \tau^{\gamma(q)}$. Таким чином прослідковується залежність між частковою функцією та середнім значення величини, q – порядок структурної функції. Узагальнена розмірність D повязана із показником степені співідношенням $\gamma(q) = (q-1)D_q$. Коефіцієнт переміжності μ задається виразом $\mu = -2dD_q / dq$ при $q = 0$. Результати цього аналізу показані на рис. 4.10 – 4.11, в якому показник степені масштабування (рис. 4.10) і узагальненої розмірності (рис. 4.11) нанесені залежно від порядку моменту. Як видно із рис. 4.10, показник степені масштабування не є лінійною функцією порядку моменту, що свідчить про мультифрактальний характер зміни магнітного поля і існування ієрархії узагальненого виміру.

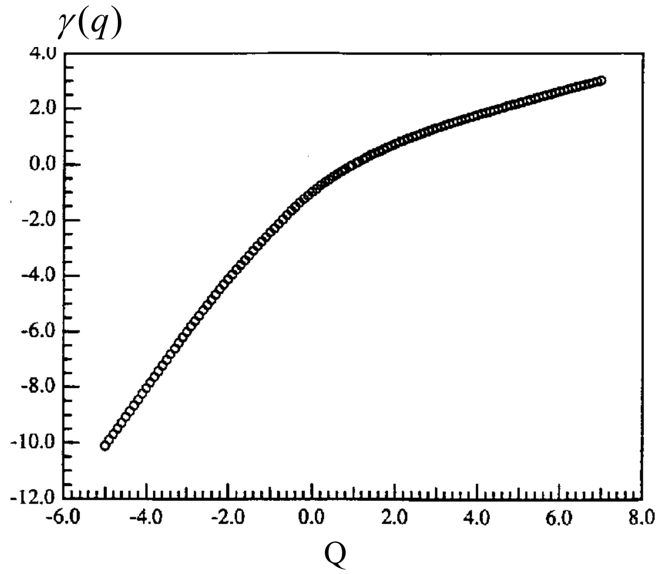


Рисунок 4.10 – Масштабний фактор для області магнітошару (2014/04/14)

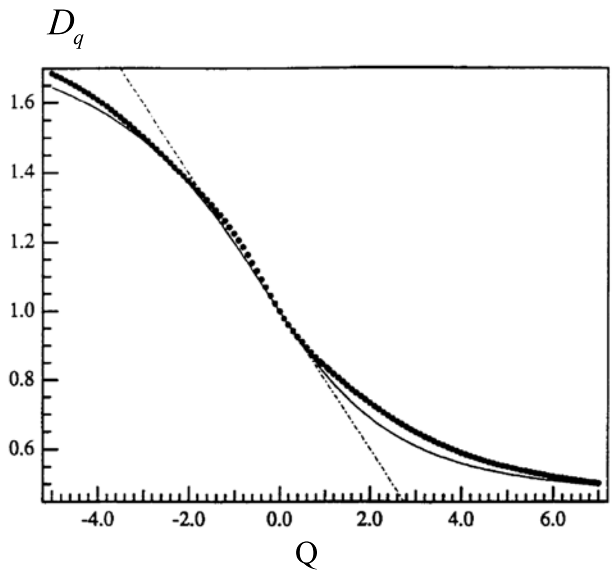


Рисунок 4.11 – Узагальнена розмірність для області магнітошару (2014/04/14). Порівняння узагальненої розмірності із моделями лог-нормальна модель (штрих – пунктирна лінія) і P – модель (суцільна лінія)

Узагальнена розмірність близька до лог-нормальної моделі тільки для невеликого діапазону порядку моментів, коли P-модель добре вписується в цілому. Слід зазначити, що обидві моделі були введені для опису переміжності як поправка до масштабування Колмогорова в інерційному інтервалі спектра турбулентності. Лог-нормальні моделі є частиною каскадної моделі, яка генерує мультиплікативний випадковий сигнал в той час як P -модель по суті є двохмасштабною множиною Кантора з коефіцієнтом фрагментації не рівним ½, так що енергетичний каскад неоднорідний на масштабах розглянутої турбулентності.

Ще одним результатом наведеного вище мультифрактального аналізу є визначення коефіцієнта переміжності, який знаходиться в діапазоні від 0,18 до ~ 0,42. Це означає, що коррекцію на переміжність потрібно вводити при аналізі степеня спектрального індексу для розгляду моделей турбулентності. Крім того, не слід забувати, що ми аналізуємо флуктуації магнітного поля а не потоку швидкості – тобто може бути різниця між рідиною і МГД-середовищем. Оскільки для однорідного потоку рідини показник степені спектрального індексу – 5/3, а для випадку МГД-речовини – 3/2.

Визначення процесів перенесення при аналізі особливостей структурних функцій (моментів функції густини ймовірності) різних порядків q відповідно до часового інтервалу τ для ряду даних $B(t)$. Структурні функції високих порядків дозволяють охарактеризувати властивості турбулентних процесів на малих масштабах. При цьому структурна функція визначалася співвідношенням [33, 36, 37]:

$$S_q(\tau) = \left\langle \left| B(t+\tau) - B(t) \right|^q \right\rangle,$$

де <...> означає усереднення експериментальних даних за часом. Крім того, має місце степенева залежність структурної функції від зсуву по часу τ:

$$S_q(\tau) \sim \tau^{\zeta(q)}.$$

Для лог-пуассонівської ізотропної 3D турбулентної каскадної моделі маємо залежність (скейлінг) [25, 26]:

$$\zeta(q) = \frac{q}{9} + 2\left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{q}{3}}\right].$$

Для моделі Політано-Пукке [38] –

$$\zeta(q) = q/8 + 1 - (1/2)^{q/4}.$$

На практиці властивість узагальненої самоподібності дозволяє підвищити точність визначення скейлінгу структурної функції при аналізі експериментальних даних. При аналізі скейлінгу структурної функції, нормованої на скейлінг для третього моменту будемо мати порівняння експериментальних даних із колмогорівською моделлю турбулентності K41, для якої $\zeta(3)$=3/3=1. Для порівняння ж експериментальних значень із моделлю двомірної турбулентності Ірошнікова-Крейчнана знаходять залежність $\zeta(q)/\zeta(4)$, оскільки для неї $\zeta(4)$ =4/4=1. Приклади проведеного ESS аналізу подані на рисунку 4.12 – 4.13.

Важливим є той факт, що турбулентні процеси в плазмі сонячного вітру близькі до двовимірної моделі Ірошнікова-Крейчнана, а в середині магнітошару і в форшоковій області описуються ізотропною логпуасонівською каскадною моделлю. У всіх інших розглянутих випадках має місце неізотропність турбулентних процесів в перехідних областях магнітосфери Землі.

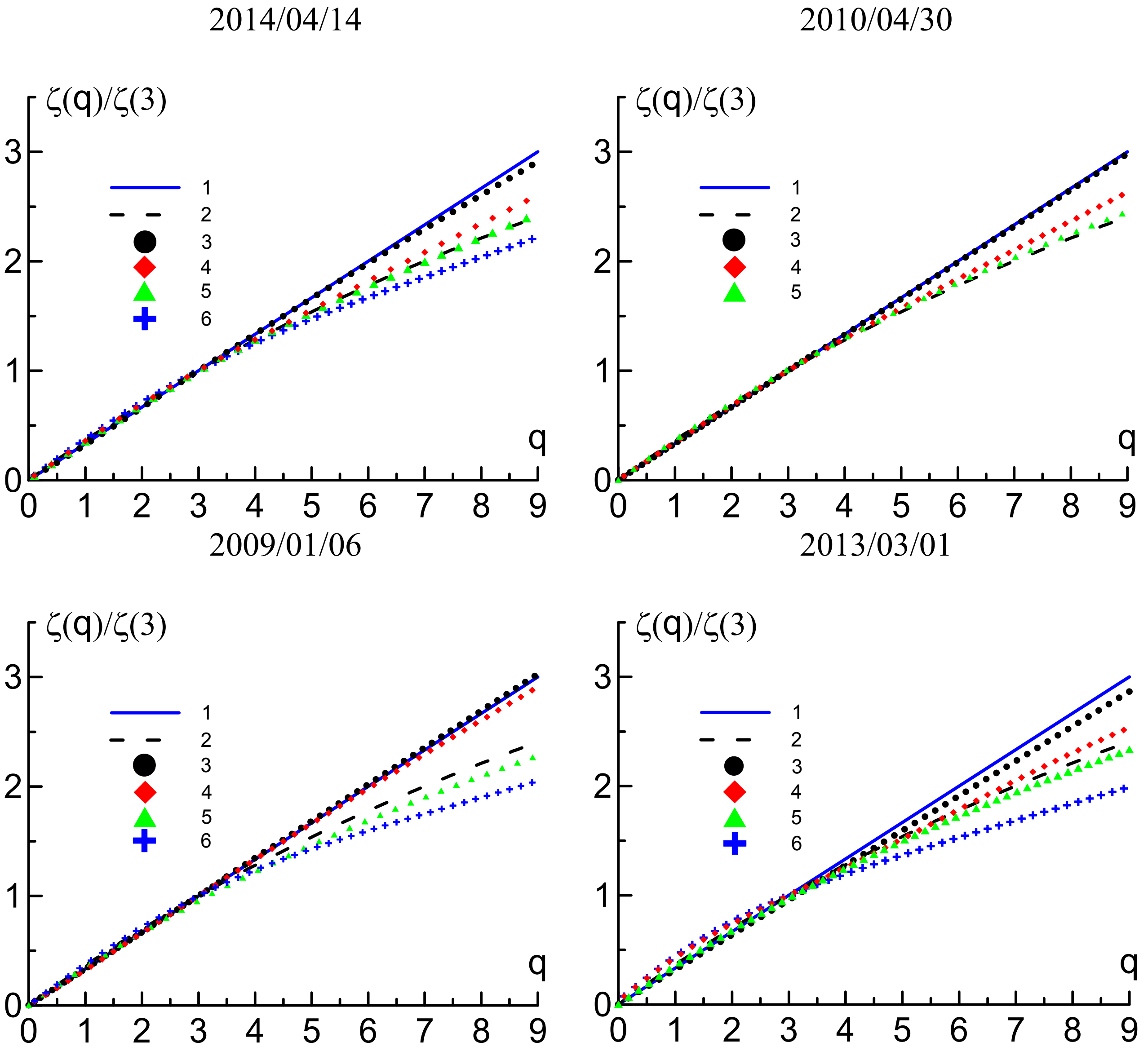


Рисунок 4.12 – Відношення експоненціального значення структурної функції *q*-того порядку до третього порядку: 1- K41 – значення розраховані по моделі Колмогорова; 2 – ШЛ – значення розраховані по ізотропній логпуасонівській каскадній моделі; 3 - СВ – експериментальні дані для плазми сонячного вітру; 4 - ФШ – експериментальні дані області форшоку, 5 - МШ – експериментальні дані для магнітошару; 6 - ПШ – експериментальні данні для постшокової області.

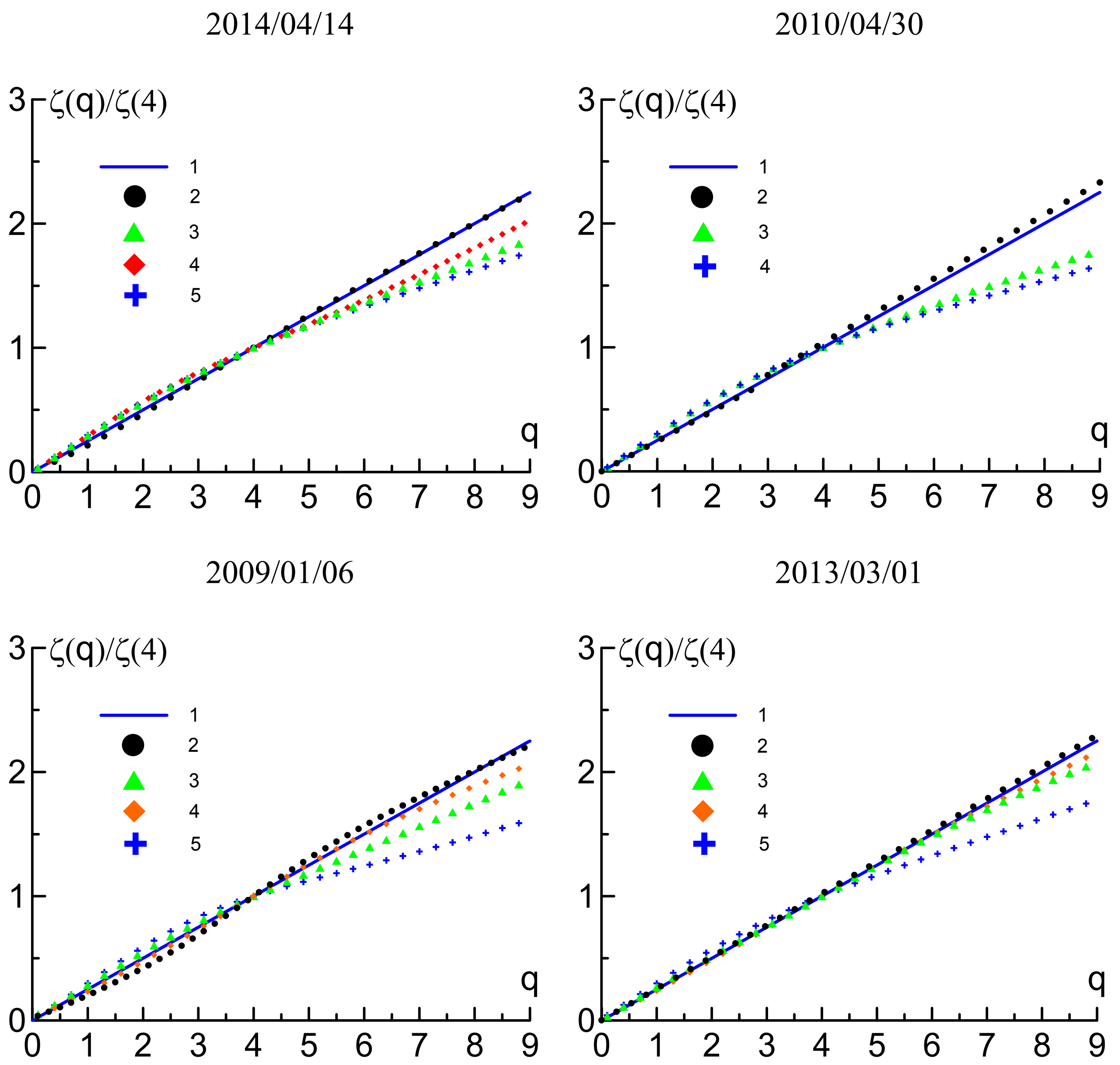


Рисунок 4.13 – Відношення експоненціального значення структурної функції q-того порядку до четвертого порядку: 1 - ІК – значення розраховані по моделі Ірошникова-Крайчнана; 2 - СВ – експериментальні дані для плазми сонячного вітру; 4 - ФШ – експериментальні дані області форшоку, 3 - МШ – експериментальні дані для магнітошару; 5 - ПШ – експериментальні данні для постшокової області.

Серед отриманих результатів можна відмітити, що турбулентні процеси в плазмі сонячного вітру для областей де дисперсія варіацій нормована на поточне середнє значення складає $\delta B/B$ ~ 0.25 – близькі до двовимірної моделі Ірошнікова-Крейчнана, а для областей де дисперсія варіацій нормована на поточне середнє значення складає $\delta B/B$ ~ 0.05 – описуються Колмогорівською моделю.

В середині магнітошару турбулентні процеси описуються ізотропною логпуасонівською каскадною моделлю. У всіх інших розглянутих випадках має місце неізотропність турбулентних процесів в перехідних областях магнітосфери Землі.

В результаті проведеного ESS-аналізу можна отримати значення параметрів лог-пуассонівського скейлінга β і Δ та використати їх для визначення особливостей турбулентного переносу плазми (табл.4.2). У такому підході коефіцієнт узагальненої дифузії залежить від $\zeta(q)$ як [39, див. звіт за 2014 р]:

$$D \propto \tau^{R} \;, R = \Delta\,(1/\beta - 1).$$

Таке співвідношення використовується для оцінки переносу в статистично неоднорідному середовищі. У загальному випадку показник R визначається фрактальними властивостями середовища.

При цьому існує зв'язок між показником степеня що характеризує еволюцію PDF та параметром R. Закон зміщення частинок з часом задається співвідношенням: $\langle \delta X^2 (\tau)\rangle \propto D\tau \propto \tau^{2S} \propto \tau^{\alpha}$ з показником $2S = 1 + R$ [39, 40, 41]. Де, як згадувалося вище, для нормальної дифузії $\alpha = 1$, а конвективний рух (балістичний) характеризується значенням $\alpha = 2$.

Параметр S – отриманий із ESS-аналізу добре узгоджується із значеннями отриманими в результаті PDF розгляду (табл. 4.1).

Можна відмітити, що із експериментально визначених індексів β і Δ у різних областях магнітосфери Землі розраховані значення $R \approx 0.3 \div 0.98$. $S \approx 0.65 \div 0.99$, $\alpha \propto 1 + R \approx 1.3 \div 1.98 > 1$. Така залежність означає існування супердифузії.

Таблиця 5.2 – Параметри дифузійних процесів

Дата	Положення	β	Δ	$R = \Delta(1/\beta - 1)$	$s = \{1 + R\}/2$
2004/03/03	ФШ	0.26	0.2	0.57	0.79
	ПШ	0.45	0.8	0.98	0.99
	МШ	0.66	0.6	0.31	0.66
2013/03/01	ФШ	0.28	0.14	0.36	0.68
	ПШ	0.49	0.94	0.98	0.99
	МШ	0.4	0.25	0.38	0.69
2014/04/09	ФШ	0.56	0.97	0.76	0.88
	ПШ	0.51	0.87	0.84	0.92
	МШ	0.67	0.71	0.35	0.68
2009/01/06	ФШ	0.45	0.24	0.3	0.65
	ПШ	0.47	0.86	0.97	0.99
	МШ	0.52	0.99	0.91	0.96
2010/04/30	ФШ	0.53	0.88	0.78	0.89
	МШ	0.59	0.65	0.45	0.73

4.3 Вейвлет – аналіз

При дослідженні турбулентних процесів виникає задача проаналізувати просторові поля зі складною, багатомасштабною структурою або часових сигналів із змінним з часом спектральним складом. Близьким до ідеології ієрархічного базису тобто використання базису кожна функція якого характеризує як певну просторову (часову) частоту, так і місце її локалізації у фізичному просторі (у часі) – вейвлет аналіз [42, 43]

Вейвлети використовуються як при аналізі часових сигналів, так і при дослідженні структури просторових полів.

Важливим етапом у розвитку ідеї локального аналізу спектральних (частотних) властивостей стало перетворення Габора (1946р.), назване також фур'є - перетворенням у вікнах. Функції Габора являють собою гармонійний сигнал, модульований функцією Гаусса. Вони добре локалізовані і в часі і в частотах, але кожна функція Габора характеризується трьома параметрами: положенням центру вікна t_0, шириною вікна τ і частотою осциляцій ν (рис.4.14). При цьому функції різного масштабу не є подібними (мають різне число осциляцій).

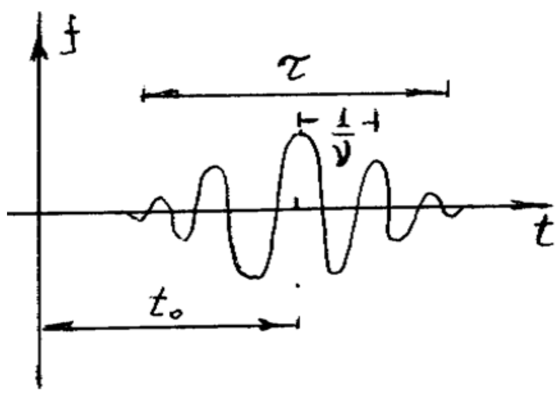


Рисунок 4.14 – Характеристики хвильового пакету

Вейвлети об'єднали в собі дві важливі властивості – подібність і виражену локалізованість у фізичному і фур'є - просторах. Основні вимоги яким має задовольняти сімейство функцій, щоб бути вейвлетами:

1) Допустимість. Функція $\psi(t)$, яку будемо називати аналізуючим вейвлетом (вживають також термін материнський вейвлет), повинна мати нульове середнє значення:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)dt = 0.$$

Ця умова може бути сформульовано й більш строго. Кажуть, що $\psi(t)$ є вейвлет порядку M, якщо для всіх $m \le M$ виконується умова

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^m \psi(t)dt = 0.$$

що вимагає рівності нулю M перших моментів вейвлета.
2) Подібність. Всі функції сімейства отримуються із аналізуючого вейвлету шляхом масштабного перетворення і зсуву,

$$\psi_{a,b}(t) = \psi\left(\frac{t-b}{a}\right).$$

Таким чином, вейвлети утворюють двохпараметричне сімейство функцій, в якому параметр a відповідає за масштаб (розтягнення) функції , а параметр b - за її положення (зсув).
3) Зворотність. Вейвлет-перетворення має бути зворотнім, тобто має існувати зворотне перетворення, яке однозначно відновлює вихідну функцію за її вейвлет-представленням.
4) Регулярність. Функція $\psi(t)$ повинна бути добре локалізована і в фізичному просторі і в просторі Фур'є .

На відміну від перетворення Фур'є, вейвлет - перетворення допускає широкий вибір функції які аналізуються. Відповідно до першої вимоги, вейвлет завжди є знакозмінною функцією, що включає зазвичай невелику кількість осциляцій. Вибір конкретного виду вейвлета залежить від цілей проведеного аналізу.

Наведемо кілька прикладів широко використовуваних вейвлетів. Простим дійсним вейвлетом, що широко використовується в задачах, що вимагають хорошого просторового розділення і не вимогливих до спектрального розділення, є вейвлет, що отримав назву «мексиканський капелюх»

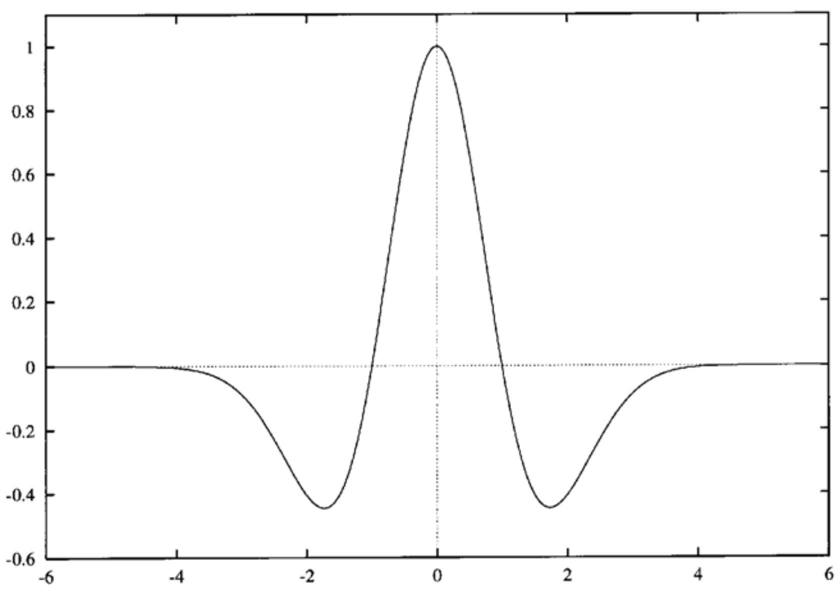
$$\psi(t) = \left(1 - t^2\right)e^{-t^2/2}$$

У завданнях, що вимагають кращого спектрального розділення, часто використовується вейвлет Морле – комплексна функція виду

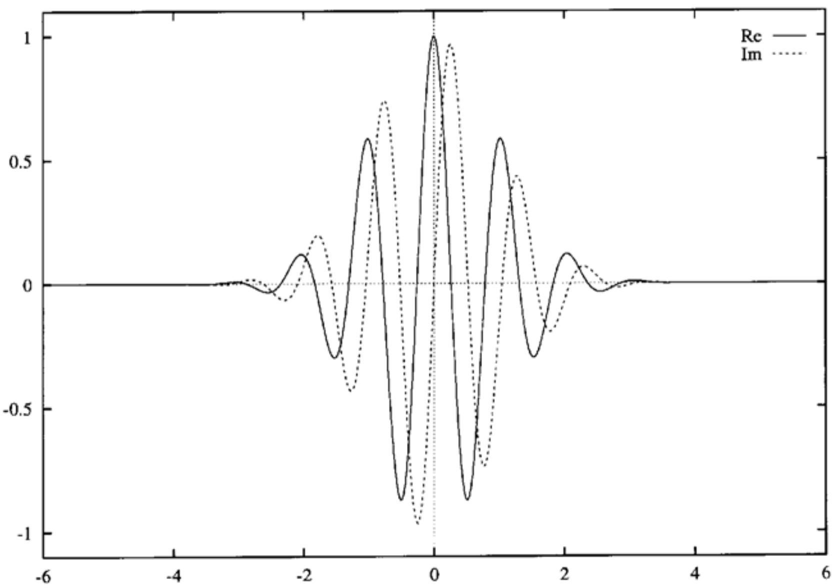
$$\psi(t) = e^{-t^2/2}e^{i\omega_0 t}.$$

На рис. 4.15,б суцільною лінією показана її дійсна частина, а пунктирною – уявна. Сама функція збігається з видом функцій, які використовуються у перетворенні Габора, але сімейство вейвлетів відрізняється від функцій Габора тим, що один раз вибравши частоту ω_0 для аналізуючого вейвлета і задавши тим самим число осциляцій, ми надалі стискаємо або розтягуємо функцію як ціле, не порушуючи подібності окремих функцій сімейства.

Вейвлет-перетворення відображає простір функцій однієї змінної (час) в простір функцій двох змінних (час і частота, або час і масштаб) і є надлишковим. Надлишок неперервного вейвлет - перетворення виражається в кореляції вейвлет - коефіцієнтів, яка тим більша, чим більший розглянутий масштаб. Інакше кажучи, чим більший масштаб, тим менше незалежних точок у вейвлет - розкладі. Цей недолік усувається в дискретному вейвлет – представленні (приклад тому - розглянутий вище ієрархічний базис, в якому число функцій геометрично зменшується зі зростанням просторового масштабу).



А



Б

Рисунок 4.15 – Форми аналізуючого вейвлету: а – "мексиканський капелюх"; б – Вейвлет Морле

Перевага вейвлет - перетворення перед перетворенням Фур'є полягає в тому, що воно дозволяє простежити за зміною спектральних властивостей сигналу з часом, вказати, які частоти (масштаби) домінують в сигналі в кожен конкретний момент часу.

Вейвлет - представлення проектує одновимірний сигнал (який був функцією тільки часу) на площину час – частота і дозволяє побачити зміну в часі спектральних властивостей сигналу.

Основне припущення при фрактальному і мультифрактальному аналізу є те, що сигнал який ми розглядаємо приймається стаціонарним, тобто, характерні часи не змінюються в межах розглянутого інтервалу. Однак для дуже динамічної ситуації, не стаціонарність сигналу не може бути виключена. У цій ситуації, проводять вейвлет - аналіз для розкладу сигналу в часовому і частотному діапазоні

$$\psi_{a,b}(t) = \psi\left(\frac{t-b}{a}\right),$$

де $a > 0$ – масштабний фактор (розтягнення) функції, $b-$ параметр що характеризує зсув материнського вейвлету. Коефіцієнт масштабування прямо пов'язаний з частотою. Коефіцієнти для безперервного вейвлет – перетворення, який використовувався в роботі мають вигляд [42, 44]

$$W(a,b) = \frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{\infty} s(t)y\left(\frac{t-b}{a}\right)dt.$$

Зазвичай обраний материнський вейвлет є Гаусовим Морле і задається формулою

$$y(\mathrm{t}) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\left[\exp\left(-i2\pi f_0 t\right) - \exp\left(-2\pi^2\sigma^2 f_0^2\right)\right]\exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right),$$

де f_0 є параметр частоти, яка дозволяє змістити частотний діапазон для дослідження і σ – це ширина гаусової обвідної. Вейвлет - аналіз має явну перевагу в порівнянні з Фур'є і фрактальним аналізом в розкладанні сигналів в частотно – часовій області, що дозволяє проводити аналіз суттєво нестаціонарних сигналів.

На рис. 4.16 представлені результати вейвлет - аналізу для флуктуацій магнітного поля в області магнітопаузи.

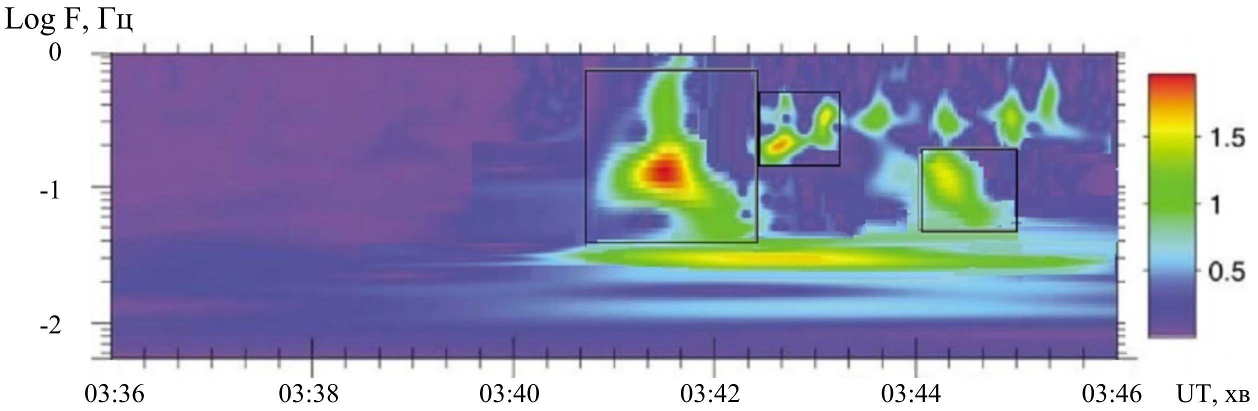


Рисунок 4.16 – Результат вейвлет – аналізу флуктуацій модуля магнітного поля при русі космічного апарату із плазми сонячного вітру в форшокову область (2010/03/21) (флуктуації в плазмі сонячного вітру порівняні з точністю вимірювання магнітометра). Прямокутниками виділено каскадні процеси. Момент переходу із плазми сонячного вітру в форшокову область ~ 03:41 UT.

На рисунку 4.16 добре прослідковується наявність кількох компонент частот. Можна відмітити наявність низькочастотної складової (~ 0.015 і ~ 0.026 Гц) яка з'явилась безпосередньо перед початком перетину форшокової області (~ 03:41 UT). В ~3:43:40, 3:44:20, 3:45:00, 3:45:20 UT спостерігаються коливання на частоті ~ 0.3 Гц. Крім того, найцікавішим є наявність каскадних процесів (виділенні на графіку прямокутниками). Так відразу після входження в форшокову область коливання, що виникли на частоті ~ 0.2 Гц поступово зміщуються з часом до частоти ~ 0.04 Гц. Аналогічна ситуація спостерігається і в ~ 03:44 UT. Таким чином, маємо зворотній каскадний процес – перехід від високих частот до низьких. Прямий каскадний процес спостерігається в момент часу ~ 03:42:25 UT і характеризується переходом від низьких до високих частот (від ~ 0.15 Гц до ~ 0.4 Гц). Інтенсивність зворотнього каскадного процесу, що починається в ~ 03:41 UT суттєво вища ніж для зворотнього каскадного процесу, що починається в 03:44 UT.

Таким чином в результаті вейвлет аналізу можна крім характерних частот визначити наявність в досліджуваній області прямих чи зворотніх каскадних процесів.

Зворотні каскадні процеси добре прослідковуються і для випадків знаходження космічного апарату в області магнітопаузи рис. 4.17 – 4.20.

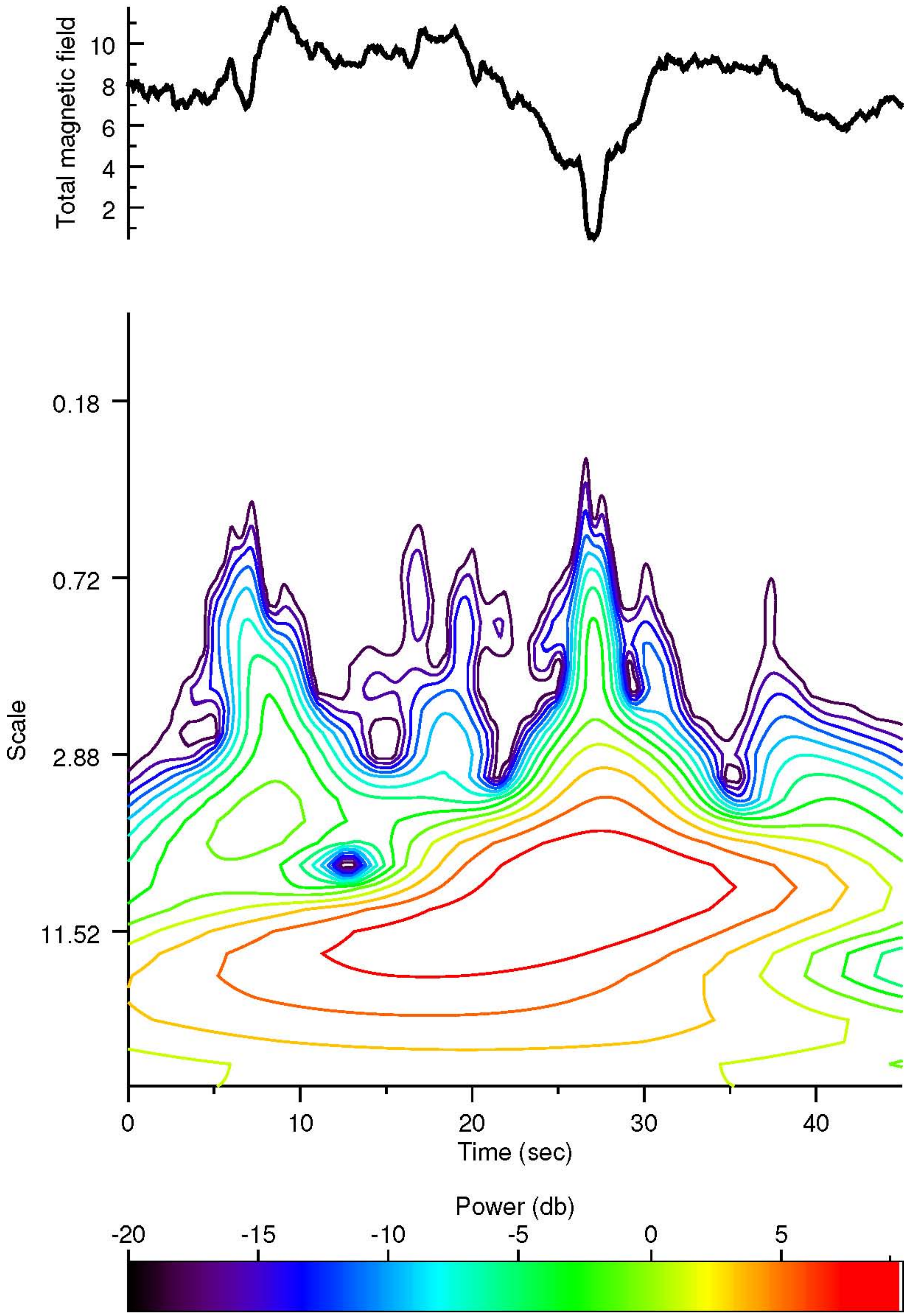


Рисунок 4.17 – Результат вейвлет – аналізу флуктуацій модуля магнітного поля при русі космічного апарату в області магнітопаузи (2009/01/06)

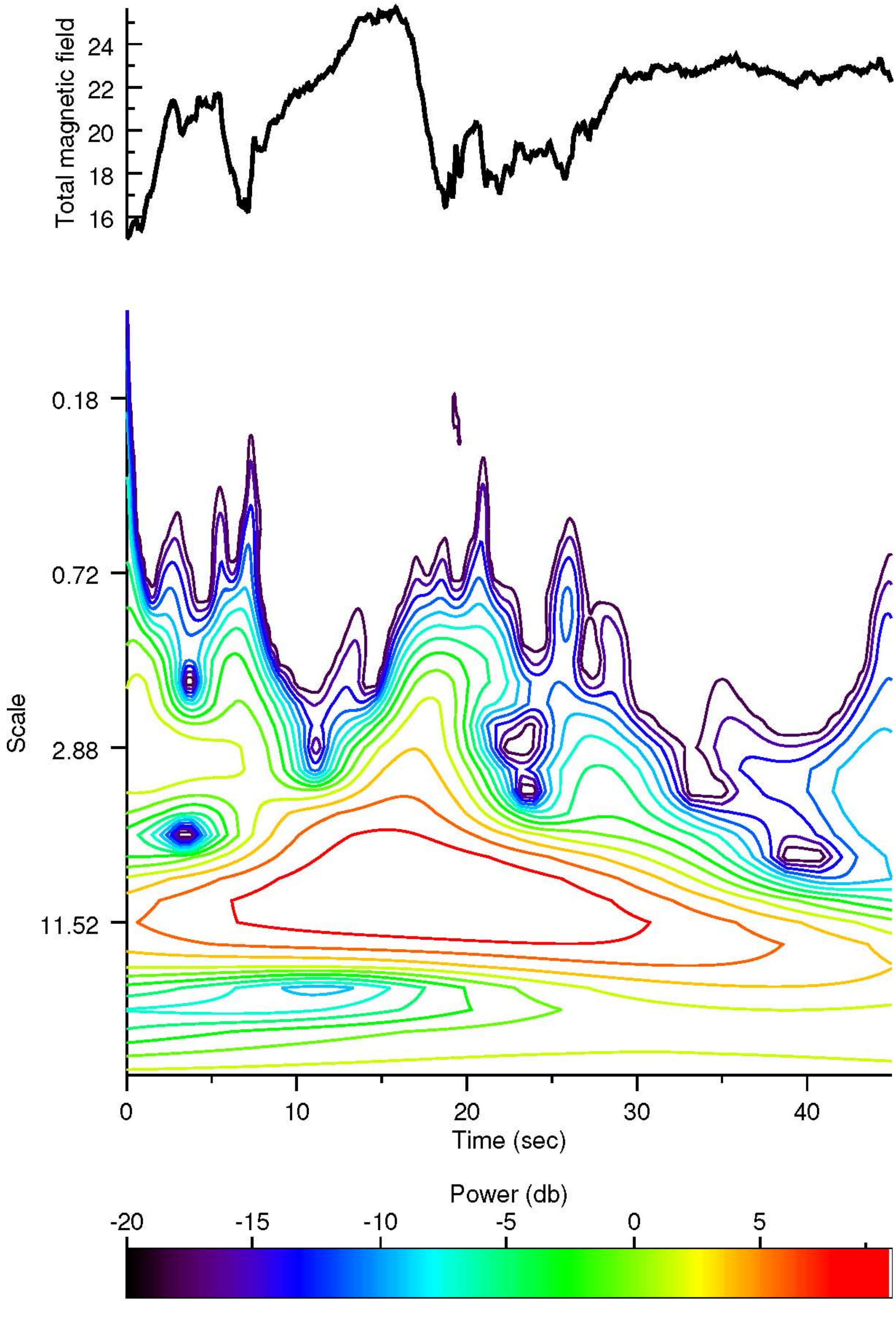


Рисунок 4.18 – Результат вейвлет – аналізу флуктуацій модуля магнітного поля при русі космічного апарату в області магнітопаузи (2010/04/30)

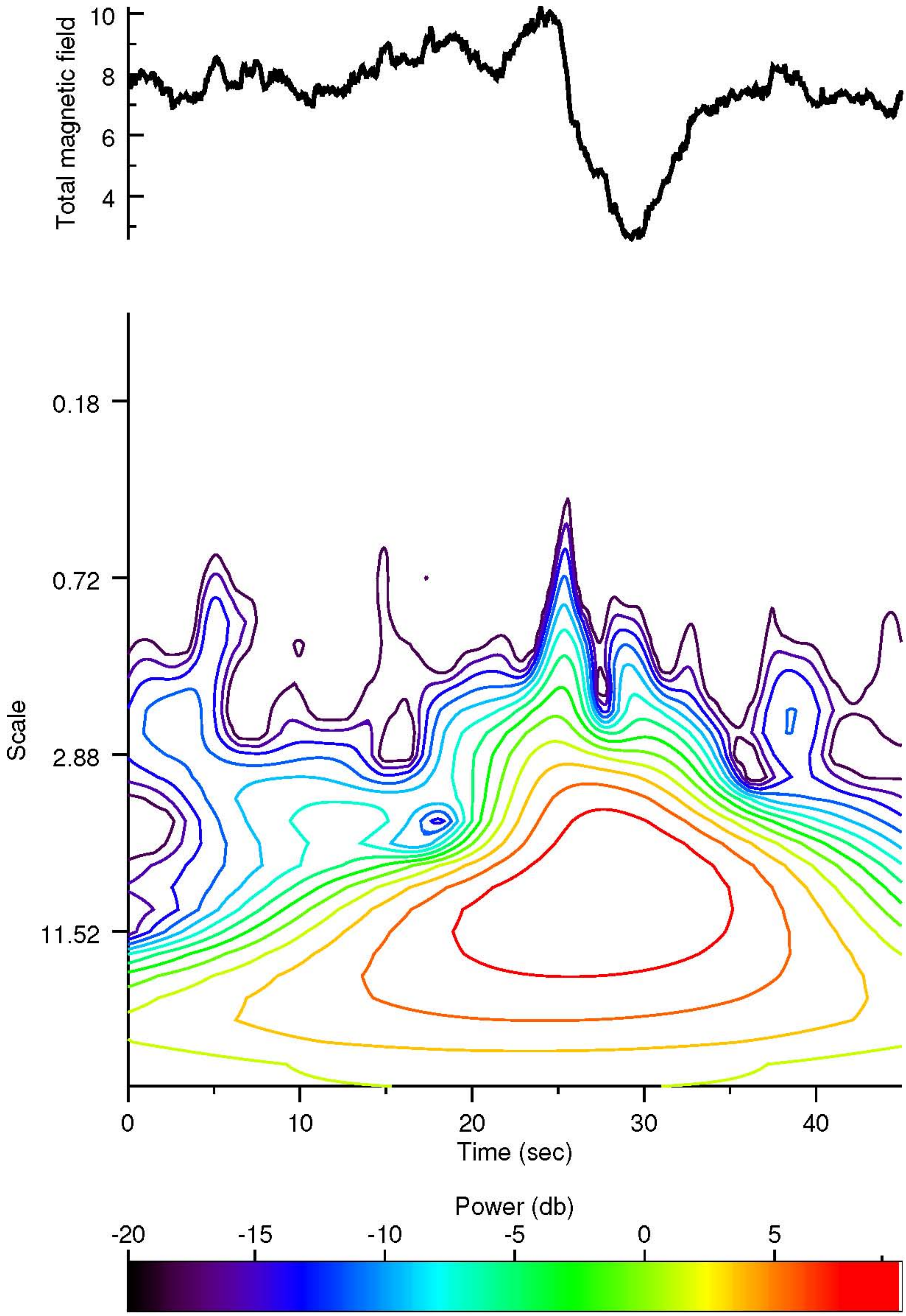


Рисунок 4.19 – Результат вейвлет – аналізу флуктуацій модуля магнітного поля при русі космічного апарату в області магнітопаузи (2013/03/01)

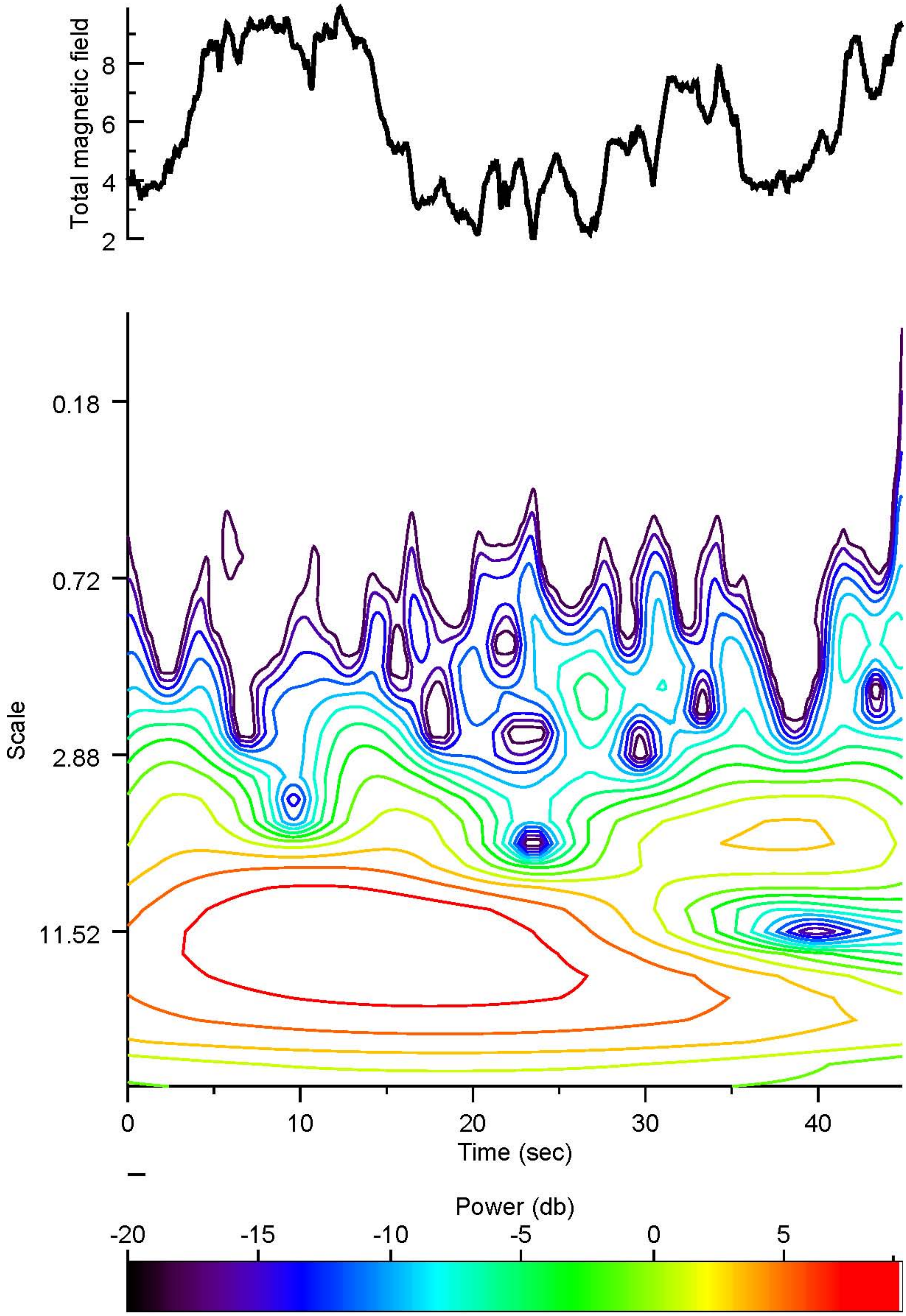


Рисунок 4.20 – Результат вейвлет – аналізу флуктуацій модуля магнітного поля при русі космічного апарату в області магнітопаузи (2014/04/09)

З вейвлет – аналізу, можна відмітити наявність багатомасштабної природи флуктуацій магнітного поля при перетині області форшоку. Зворотний каскад функцій може бути також отриманий з віконного перетворення Фур'є, як показано на рис. 4.21. Віконне перетворення Фур'є застосовується для послідовності розглянутих інтервалів. Шість панелей дають спектри потужності для цих послідовних інтервалів. Діапазон вказаний вгорі відноситься до сірої частини спектру, внизу до чорної. Видно, що після загального зростання енергії хвиль до початку перетину області магнітопаузі, (хвиля була у високочастотному діапазоні, найбільш помітно при ~ 0.3 – 0.4 Гц) поступово відбувається зміщення спектру в область низьких частот при ~ 0.02 Гц. Проте віконне перетворення Фур'є поступається вейвлет – перетвореню, тому що час початку ~ хвилі із частотою 0.3 – 0.4 Гц не може бути визначений добре.

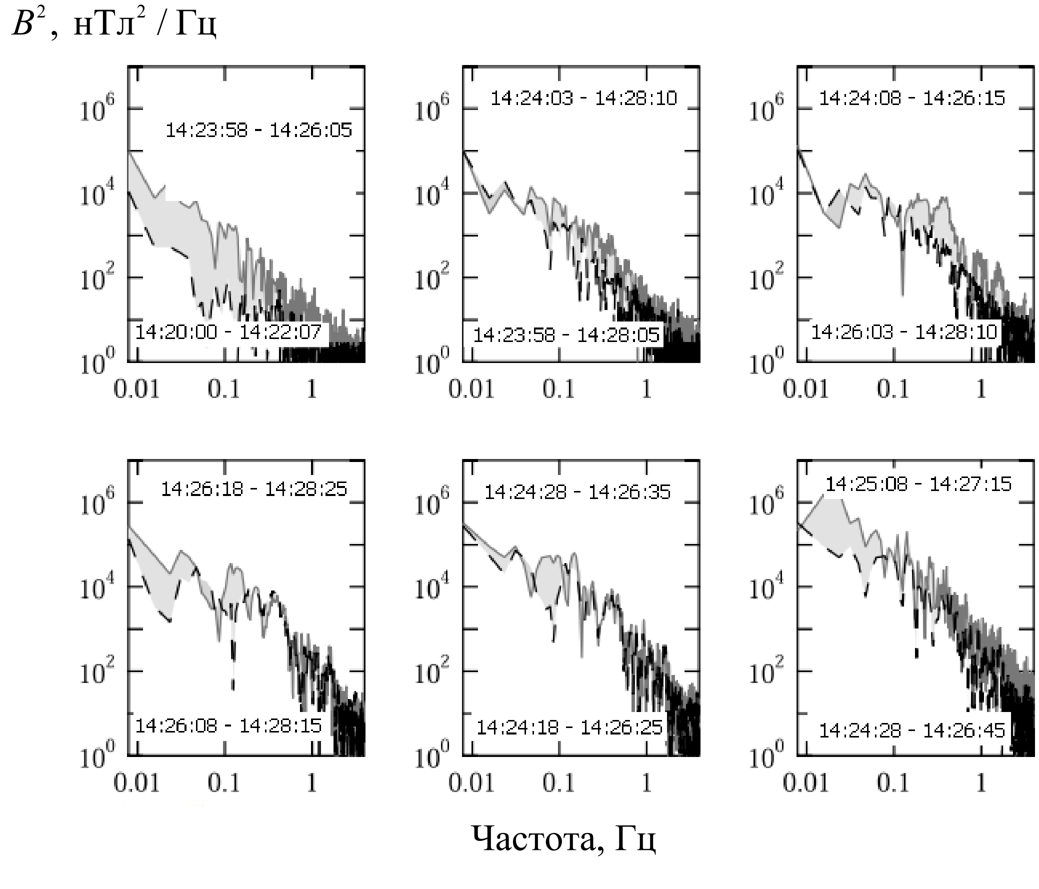


Рисунок 4.21 **–** Результати Фурє - аналізу для флуктуацій магнітного поля під час перетину області магнітопаузи для модуля магнітного поля

Таким чином, як вейвлет аналіз так і віконне Фур’є перетворення вказують на наявність каскадних процесів – здебільшого зворотних каскадних процесів при наявності різких стрибків параметрів в перехідних областях магнітосфери Землі.

ВИСНОВКИ

В рамках звіту розглянуто особливості взаємодії сонячного вітру із магнітосферою Землі. Вказано на цілу низку процесів в області ударної хвилі. Проведено порівняння модельних розрахунків стрибків гідродинамічних параметрів на фронті ударної хвилі. Розглянуто механізми які впливають на укручення хвильового фронту та проведено порівняння між квазіперпендикулярними та квазіпаралельними ударними хвилями. Проаналізовано можливість формування форшокової області та вказано на поведінку параметрів у магнітошарі. Відмічається, що модель Спрайтера, що використовуєть для моделювання стрибків параметрів в околі ударної хвилі досить добре узгоджується із експериментальними даними.

Крім того, проведено ґрунтовний аналіз механізмів і підходів до опису турбулентних процесів. Значна увага приділена опису розвиненої турбулентності і характерним особливостям каскадних моделей.

В ході виконання роботи проведено детальний аналіз флуктуацій магнітного поля в різних областях магнітосфери та плазмі сонячного вітру. При цьому проводився аналіз різними сучасними методами – від фрактального і мультифрактального до вейвлет аналізу. Вся сукупність використаних методів дослідження вказує на наявність багатомасштабної природи турбулентних процесів в перехідних – пограничних областях магнітосфери Землі.

При цьому ситуація в магнітошарі суттєво відрізняється від незбуреного сонячного вітру насамперед набагато більш високою змінністю параметрів магнітного поля. Цей факт може вказувати на можливість перетворення ламінарного потоку за ударною хвилею в нестаціонарні магнітозвукові потоки і уповільнення альвенівскої течії, що становить єдину синхронізовану картину взаємодії у зовнішньому пограничному шарі, товщина якого оцінюється в 1–2 радіуса Землі.

При перетині УХ не лише зростає інтенсивність флуктуацій, але змінюється і їх структура: у постшоковій області переважають майже ізотропні коливання, де магнітне поле демонструє сильні флуктуації як за величиною, так і за напрямом. Варіації поля і плазми в цій області інтенсивні, але низькокогерентні.

У глибині МШ магнітне поле із сильними флуктуаціями за напрямом переважно стискається. Характер турбулентного потоку плазми в МШ не пов'язаний безпосередньо з турбулентністю в СВ, і в значній мірі є проявом власних процесів в МШ.

Досліджено, що із переходом від квазіпараллельної до квазіперпендикулярної ударної хвилі, рівень варіацій магнітного поля в магнітошарі сильно знижується.

При порівнянні лінійного фрактального аналізу із спектральним аналізом для форшокової області отримано, що фрактальний аналіз є більш стабільним і локалізованим в часі в порівнянні з Фур'є аналізом. Крім того, фрактальний підхід дає надійні результати навіть при аналізі на масштабах які становлять значну частину всього інтервалу вимірювань. Отримано лінійний зв'язок між лінійною фрактальною розмірністю і показником степені перекачки енергії для форшокової області.

Аналіз зміни висоти функції розподілу густини ймовірності флуктуацій магнітного поля отриманих в рамках космічної місії „Кластер–2” показав наявність переміжності в перехідних областях магнітосфери Землі. Для плазми ж сонячного вітру зміна максимуму функції густини ймовірності подібна до типового Гаусового розподілу – переміжності немає.

Перехід від неоднорідної до однорідної турбулентності відбувається на масштабах іонноциклотронної частоти. Просторові масштаби ~ 100 км. Найбільш неоднорідними є флуктуації магнітного поля в постшоковій області.

Інерційний діапазон в перехідних областях магнітосфери Землі на порядок менший ніж інерційний діапазон для плазми сонячного вітру.

Також отримано, що мультифрактальний спектр в перехідних областях параболічний (для броунівського процесу – точка (процес характеризується одним значенням)). Найбільше уширення 0.7 спостерігається для постшокової області, а найменше для форшоку – 0.4. Ще одним результатом мультифрактального аналізу є визначення коефіцієнта переміжності, який знаходиться в діапазоні від 0,18 до ~ 0,42. Це означає, що корекцію на переміжність потрібно вводити при аналізі степеня спектрального індексу для розгляду моделей турбулентності.

Для конкретизації типу турбулентних процесів було проведено ESS-аналіз в результаті якого можна відмітити, що турбулентні процеси в плазмі сонячного вітру для областей де дисперсія варіацій нормована на поточне середнє значення складає $\delta B/B$ ~ 0.25 – близькі до двовимірної моделі Ірошнікова-Крейчнана, а для областей де дисперсія варіацій нормована на поточне середнє значення складає $\delta B/B$ ~ 0.05 – описуються Колмогорівською моделлю. В середині магнітошару турбулентні процеси описуються ізотропною логпуасонівською каскадною моделлю. У всіх інших перехідних областях магнітосфери Землі має місце неізотропність турбулентних процесів.

Із PDF та ESS – аналізів знайдено значення узагальненого коефіцієнта дифузії на різних масштабах. Можна відмітити, що для перехідних областей маємо степеневу залежність від масштабу (показник степені варіюється в межах 1.3 – 1.98).

В результаті вейвлет аналізу вдалося, крім визначення характерних частот, виявити в форшоковій області, прямі і зворотні каскадні процеси. При цьому при переході із плазми сонячного вітру до форшокової області зворотні каскади виникають навіть частіше ніж прямі. Зворотні каскадні процеси зафіксовані і в області магнітопаузи.

Зворотні каскади при наявності різких стрибків параметрів в перехідних областях магнітосфери Землі вдалося виділити і при віконному Фур’є перетворенні.

Таким чином, магнітосфера веде себе як самоорганізована система з різними характерними масштабами.

Апробація різних методів і підходів по дослідженню характеристики турбулентного середовища в перехідних шарах магнітосфери Землі та плазмі сонячного вітру показала хорошу відповідність між різними дослідженнями і можливість взаємного їх доповнення для створення картини процесів в найменш досліджених середовищах – турбулентних.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. **Ness N.F.** The Earth's magnetic tail / Ness N.F. // JGR. – 1965. – V. 70. – P. 2989–3005.
2. **Зеленый Л.М.** Космическая геогелиофизика. / Л.М. Зеленый, И.С. – Веселовский (ред.) М.: Физматлит. – Том 1. – 2008. – 624 с.
3. **Spreiter J.R.** Hydromagnetic flow around the magnetosphere / Spreiter J.R.., Summers A.L., Alksne A.Y. // Planet. a. Space Sci. – 1966. – V. 14, – P. 223–253.
4. **Spreiter J.R.** The location of the planetary bow shocks: A critical overview of theory and observations / Spreiter J.R., Stahara S.S. // Adv. Space Res. – 1995. – V. 15. – No. 8/9. – P. 433–449.
5. **Fairfield D.** Bow shock associated waves observed in the far upstream interplanetary medium / Fairfield D. // JGR. – 1969. – V. 74. – P. 3541–3553.
6. **Fairfield D.H**. Magnetotail energy storage and the variability of the magnetotail current sheet / Fairfield D. Ed.Hones E.W.// Magnetic Reconnection in Space and Laboratory / Plasmas. Geophys. Monogr. Ser. V. 30 — Washington. – AGU. – 1984. – P. 168.
7. **Kennel C.F**. A quarter century of collisionless shock research. / Kennel C.F., Edmiston J.P. // Geophysical Monograph Series – V. 34. — Washington: – AGU, – 1985. — P. 1–36
8. **Burgess D.** Foreshock-shock interaction at collisionless quasi-parallel shocks / Burgess D. // Adv. Space Res. – 1995. – V. 15. – P. 159–167.
9. **Spreiter J.R.** A new predictive model for determining solar wind terrestrial planet interaction / Spreiter J.R., Stahara S.S // JGR. – 1980. – V. 85(A12). – P. 6769–6777.
10. **Nemecek Z.** Observations of the radial magnetosheath profile and a comparison with gasdynamic model predictions / Nemecek Z., Safrankova J., Zastenker G.N. et al. // GRL. – 2000. – V. 27(17). – P. 2801–2804.
11. **Колмогоров А.Н.** Локальная структура турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости при очень больших числах Рейнольдса / Колмогоров А.Н. // Доклады АН СССР– Т. 30 (4). – 1941. – С. 299–303.
12. **Баренблатт Г. И.** Турбулентные пограничные слои при очень больших числах Рейнольдса. / Баренблатт Г. И. // Успехи математических наук (УМН) – 2004. – 59:1(355). – С. 45–62.
13. **Ландау Л.Д.** , Лифшиц Е.М. Гидродинамика.– М.: Наука, 1988.–С.736
14. **Кадомцев Б.Б.** Коллективные явления в плазме / Кадомцев Б.Б.– М. Наука – 1988. –303 с.
15. **Бородулин В.И.** автореферат д.ф.м.н. диссертации 2009 Нелинейные механизмы порождения турбулентности в погранслоях.
16. **Kolmogorov A.** A refinement of previous hypotheses concerning the local structure of turbulence in a viscous incompressible fluid at high Reynolds number// J. Fluid Mech.–1962. –V.13.–No. 1. –P.82–85

17. **Фриш У.** Турбулентность: Наследие А. Н. Колмогорова. / Фриш У. – М.: Фазис. – 1998. –343 с.
18. **Фрик П.Г.** Турбулентность : подходы и модели.– Москва –Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2003.
19. **Монин С..** Статистическая гидромеханика. Ч.2. Механика турбулентности. / С.Монин, А.М., Яглом Л. – Гидрометеоиздат – 1967.– 720 с.
20. **Заславский Г.М.** Введение в нелинейную физику От маятника до турбулентности и хаоса. / Заславский Г.М. , Сагдеев Р.З. – М.: Наука. – 1988. –368 с.
21. **Новиков Е.А.** Перемежаемость турбулентности и спектр флюктуаций диссипации энергии / Новиков Е.А., Стюарт Р.У. // Изв. АН СССР, сер. Геофиз.– 1964. – № 3 – С. 408–413.
22. **Schertzer D.,** Lovejoy S., Hubert P. , An Introduction to Stochastic Multifractal Fields.// Mathematical Problems in Environmental Science and Engineering, /A. Ern and L. Weiping, editors, Series in Contemporary Applied Mathematics, Higher Education Press, Beijing , –2002. –V.4. –P.106–179.
23. **Lovejoy S.** Diffusion in One Dimensional Multifractal Porous Media / Lovejoy S., D. Schertzer, P. Silas. // Water Resources Research. – 1998. – V. 34. – P. 3283–3291.
24. **Lauwerier H. A.** Fractals – images of chaos / H. A Lauwerier. // Princetion Univ. Press – 1991
25. **Dubrulle B.** Intermittency in fully developed turbulence: Log – Poisson statistics and generalized scale covariance / Dubrulle B. // Phys. Rev. Lett. – 1994. 73. — P. 959–962.
26. **She Z.** Universal scaling laws in fully developed turbulence / She Z., Leveque E. // Phys. Rev. Lett. – 1994. – 72. – P. 336–339.
27. **Benzi R.** Extended self – similarity in turbulent flows / Benzi R., Ciliberto S., Tripiccione R. et al. // Phys. Rev. E. – 1993. – V. 48. – P. R29–R32.
28. **Шустер Г.** Детерминированный хаос / Шустер Г. – М., Мир. – 1988. – 240 с.
29. **Гледзер Е.Б.** Системы гидродинамического типа и их применение / Гледзер Е.Б. Должанский Ф., Обухов А.М. –М., Наука. – 1981. – 366 с.
30. **Feder, J.** 1988. Fractals. / Feder, J. // Plenum Press, New York, – P. 12, Section 2:3.
31. **Ohtani, S.** Magnetic uctuations associated with tail current disruption: fractal analysis / Ohtani, S., Higuchi, T., Lui, A.T.Y., Takahashi, K // Journal of Geophysical Research – 1995. – 100 – P. 19135
32. **Козак Л.В.** Статистический анализ турбулентности форшоковой области и магнитослоя Земли / Козак Л.В, Пилипенко В.А., Чугунова О.М. и др. // Космические исследования – 2011. – 49, № 3.– С. 202–212.
33. **Козак Л.В.** Ститатисческий анализ турбулентности форшоковой области и магнитослоя Земли / Козак Л.В, Пилипенко В.А., Чугунова О.М. и др. // Космические исследования – 2011. – 49, № 3.– С. 202–212.

34. **Consolini G.** On the magnetic field fluctuations during magnetospheric tail current disruption: A statistical approach / Consolini G., M. Kretzschmar A.T.Y. Lui, G.Zimbardo, and W.M. Macek. // J. Geophys. Res. – 2005.– 110 – A07202. doi:10.1029/2004JA010947.
35. **Закс Л.** Статистическое оценивание / Закс Л. – М., «Статистика» – 1976 – 598 с.
36. **Budaev V. P.** Intermittency and extended self–similarity in space and fusion plasma: boundary effects / Budaev V. P., Savin S., Zelenyi L. et al. // Plasma Phys. Control. Fusion. – 2008. – V. 50. – P. 074014.
37. **Савин С. П.** Динамическое взаимодействие потока плазмы с горячим погранслоем геомагнитной ловушки / Савин С. П., Л. М. Зеленый, Э. Амата и др. // Письма в ЖЕТФ. – 2004. – 79, № 8. –С. 452–456.
38. **Politano H.,** Pouquet A., and Carbone V. Determination of anomalous exponents of structure functions in two-dimensional magnetohydrodynamic turbulence // Europhys. Lett. –1998. –V.43. –P. 516–521
39. **Treumann R. A.** Theory of super-diffusion for the magnetopause / Treumann R. A. // Geophys. Res. Lett. – 1997. – 24– P. 1727–1730.
40. **Chechkin A.V** Generalized fractional diffusion equations for accelerating subdiffusion and truncated Lévy flights / Chechkin A.V., Gorenflo R., and Sokolov I.M., // Physical Review – 2002. – 66, 046129. – P. 13.
41. **Lovejoy S.** Diffusion in One Dimensional Multifractal Porous Media / Lovejoy S., D. Schertzer, P. Silas. // Water Resources Research. – 1998. – V. 34. – P. 3283–3291.
42. **Астафьева Н. М.** Вейвлет-анализ: основы теории и примеры применения / Астафьева Н. М. // Успехи физических наук. – 1996. –. Т.166. –N.11.
43. **Фрик П.Г.** Вейвлет-анализ и иерархические модели турбулентности / Фрик П.Г. –ИМ СС УрО РАН, Пермь. – 1992. – 40 с.
44. **Grossmann A.** Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape / Grossmann A., Morlet J. // SIAM Journal of Mathematical Analysis – 1984. – 15. – P. 723 – 731.